INSTITUTIONES PHILOSOPHICAE AD STUDIA THEOLOGICA POTISSIMUM...





INSTITUTIONES PHILOSOPHICÆ
AD STUDIA THEOLOGICA POTISSIMUM ACCOMMODATÆ,

AUCTORE
FRANCISCO JACQUIER
EX MINIMORUM FAMILIA
PRIMARIARUM PER EUROPAM ACADEMIARUM SOCIO,
IN LYCEO ROMANO, ET IN COLLEGIO URBANO DE PROPAGANDA FIDE PROFESSORE.

TOMUS TERTIUS,

Quo Elementa Arithmeticæ, Algebræ, & Geometriæ continentur.

EDITIO NOVISSIMA
Ab Auctore ipso recognita pluribusque in locis locupletata.



VENETIIS MDCCLXVII.
SIMONIS OCCHI CURIS,
Superiorum permissu, ac Privilegio.



AUCTOR LECTORI.

PHysicam inter Geometricamque doctrinam tam arcta est necessitudo, ut apud omnes cultiores Viros tanquam vanissimum merito habeatur Physicæ studium Geometriæ præsidio destitutum. Quæ cum ita sint, nemo mirari debet, quod a studiosis adolescentibus, sacræ licet Theologiæ destinatis, Arithmeticæ, & Geometriæ Elementa requiram; si enim his careant doctrinæ Physicæ adjumentis, satius est, eos huic præclarissimo studio valedicere omnino; *melius est nihil scire, quam male scire*. Tale enim cognitionis, potius dicam ignorantiæ genus mentis aciem hebetat, rectumque judicium corrumpit, & omni studiorum generi nocet plurimum. At me fortasse reprehendent censores aliqui, quod nova elementa ediderim, cum nihil fere in orbe litterario frequentius sit Elementorum libris. Neque talem me esse, quis sibi falso persuadeat, ut de aliis elementis minus laudabiliter sentiam, huncque meum libellum supra alios omnes extollam, quod tamen a plerisque Elementorum Auctoribus nimis arroganter factum video. Et quidem variis Elementis, ratione licet, & methodo diversissimis, suam justam laudem concedendam esse, facile quisque fatebitur; si varias attenderit adolescentum conditiones, atque voluntates. Alii sublimiorem Physicam, Mathesimque universam addiscere, & funditus haurire, sibi proponunt; alii autem aliis studiis, gravioribusque negotiis nati institutiones Geometricas strictim, leviterque tantum arripiunt, quantum scilicet expoliendo, perficien-

ficiendoque ingenio ſatis eſt; alii ultra Geometriam, quam *practicam* vocant, nolunt progredi, illaque minus nobili Geometriæ parte contenti ſunt; alii tandem alios fines, aliaque conſilia in animo habent. Quid ergo mirum, quod ego Arithmeticæ, & Geometriæ Elementa ad meas Phyſicas inſtitutiones accommodatiſſima proponam? At quæcumque ſit Elementorum ratio, demonſtrationis ſeveritas religioſe ſemper tenenda eſt, neque obſcura multarum propoſitionum farragine juvenum mens eſt obruenda, ſed ſplendidiori accuratioris Geometriæ lumine illuſtranda. Monendi ergo ſunt ſtudioſi adoleſcentes, ut ab iis caute abſtineant Elementis, quæ nec ſatis accurata methodo conſcripta ſunt, nec firmiſſimo demonſtrationum robore munita. Perniciosiſſima quidem ſunt ſtudioſæ juventuti talia Elementa, quæ eos habent Auctores, quorum doctrina tota in Elementis continetur. Verum ſi recto proportionum ordine, nexuque neceſſario colligatæ fuerint demonſtrationes omnes; ex hoc ſtudio diligenter, &, ut par eſt, inſtituto, in quolibet ſcientiarum genere fructum maximum ſine ulla dubitatione polliceor. Nec quidquam exiſtimationis geometrico ſtudio detrahi debet, ſi aliqui extiterint in rebus Geometricis etiam verſatiſſimi, in vulgari tamen agendi ratione, & in rebus quoque familiariſſimis omnino inepti. Id quidem, quod ſumma injuria objici ſolet, tribuendum eſt præcipiti quorumdam Geometrarum judicio. Non deſunt, fateor, celeberrimi etiam viri, qui in rebus Mathematicis toti occupati, neceſſaria rerum tractandarum, vel gerendarum principia, & elementa non ſatis tenent;

nent;

nent; atque hinc mirum non eſt, quod aliquando errent graviter, Geometrarum, non Geometriæ vitio. Et requidem ipſa, ſi fons erroris probe attendatur, vitium in principiis, non vero in *conſequentiis* latere deprehenditur; contra autem alii homines non pauci veris utuntur principiis, errant autem in *conſequentiis*. Itaque huc mihi maxime reducendum videtur geometrici ſtudii pretium: ſi nempe duos fingere liceat homines eadem ingenii vi, eodemque cognitionum gradu præditos, atque *cæteris*, ut vulgo dicunt, *paribus*, unus autem ſit Geometriæ auxilio adjutus, alter autem deſtitutus, facile mihi perſuadeo virum Geometram in quolibet ſcribendi genere, in tractanda etiam quæſtione Theologica multo excellentiorem futurum: neque enim quæ prima ſunt, poſtrema dicet, & viciſſim; nec quæ perſpicua ſunt, & illuſtria, minus accurata methodo obſcurabit; aut quæ abſtruſa ſunt, & involuta, denſiori caligine non obvolvet. Verum ne Geometriæ ſtudio nimis tribuere videar, & hanc, quam maxime amo, diſciplinam magnificentius prædicare, de iis non loquor melioris ingenii viris, in quibus excellens judicium meditatione, & experientia ſubactum, atque perfectum miramur, ſive graviora tractanda ſint negotia, ſive ſtudiis quibuſcumque danda ſit opera. Has juſtiſſimas Geometriæ laudes attigiſſe ſatis ſit ad excitandam adoleſcentum voluntatem. Faxit D. O. M., ut hoc meo qualicumque labore utantur, non in rebus Phyſicis tantum, ſed etiam ut in ſtudiis gravioribus, quem quidem fructum maxime exopto, ratiocinandi vim accuratiori methodo augeant, atque urgeant,

hu-

hujus tamen sanctissimi dogmatis probe memores: *Captivare intellectum in obsequium fidei*.

Cæterum monendum superest, Scholia, & Appendices in his Elementis prætermitti posse ab iis, qui minori pollent intelligendi facilitate; minus enim necessaria sunt hæc additamenta.

APPROBATIO.

Reverendissimi Patris Thomæ Augustini Ricchini Ordinis Prædicatorum Sacri Palatii Apostolici Magistri jussu legi doctissimi, eruditissimique Viri Reverendissimi Patris Jacquier *Elementa Arithmeticæ*, *Algebræ*, *& Geometriæ &c.* Quantum inde voluptatis cœperim, difficile est existimare. Nam cum nihil contineat, quod ab orthodoxæ Christianæ Religionis decretis, atque institutis discrepet, tum ita esse comperi, ordinate, accurate, dilucide, eleganter, tantoque nexu, ac tanta colligatione rerum perscriptum, ut ad ejus Physicas Institutiones illustrandas nihil supra desiderari posse videatur. Quare illud ajo, me vehementer cupere, ut quam fieri cito potest, in publicam emittatur lucem.

Dabam Romæ ex Monasterio S. Mariæ Novæ die 27. Mense Augusto ann. 1760. D. ALOYSIUS STAMPA *Abbas Olivetanus*, *Promovendorum ad Episcopatum Examinator*, *& in Collegio Urbano de Propaganda Fide Studiorum Præfectus*.

IN-

INDEX

Arithmetica, & Algebra.

GEOMETRIA.

SECT.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ

TUM VULGARIS, TUM SPECIOSÆ.

CAPUT I.

De præcipuis utriusque Arithmeticæ operationibus generatim consideratis.

I. ARithmetica generatim definitur *scientia computandi*. Computatio autem vel fit per vulgares numeros, ac proinde & determinatos 1. 2. 3. &c. vel per alphabeti litteras a, b, c, &c. quæ numerum quemlibet, aut quantitatem quamlibet designant. Prima computandi ratio *Arithmetica* simpliciter dicitur: altera autem vocatur Arithmetica *speciosa*, vel *Algebra*; & convenientius a Nevvtono Arithmetica *universalis* appellatur. Has quidem definitiones juxta vulgarem docendi consuetudinem præmittimus; monendum tamen est, scientias quasdam vix clare definiri posse: nisi earumdem scientiarum diligens præcedat analysis, atque accurata explicatio. Ita in præsenti casu, explicatis Arithmeticæ, & Algebræ operationibus, recte jam dicere liceret. Hæc, quam vobis explicavimus, scientia ea est, quæ *Arithmetica*, vel *Algebra* vocatur. Per *numerum* Arithmetici intelligunt *unitatum multitudinem*: at accuratius a Nevvtono definitur numerus *relatio*, seu *ratio* quantitatis cu-

cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem. Quæ quidem definitio, ut in bono lumine collocetur, observandum est, quantitatem quamlibet cum alia ejusdem generis quantitate comparatam vel ea minorem esse, vel majorem, vel tandem ipsi æqualem; hoc est, magnitudinem aliquam vel in alia contineri, vel hanc aliam certo modo continere: hic autem modus, quo magnitudo aliqua aliam continet, vel in ea continetur, *numerus* dicitur. E. G. numerus 3 exprimit rationem magnitudinis alicujus ad aliam minorem, quæ pro unitate assumitur, & in majori ter continetur. Contra autem si quantitas major 3 pro unitate adhibeatur, erit quantitas 1 tertia pars quantitatis majoris, quæ tanquam unitas consideratur, sive 1 ter in quantitate majori continetur. Inde autem intelligitur, quid sit numerus *integer*, quid numerus *fractus*. Integer dicitur, quem unitas metitur; fractus, qui est pars unitatis: ita 1. 2. 3. &c. sunt numeri integri; sed dimidia, tertia, quarta &c. pars unitatis sunt numeri fracti: ita autem exprimi solent numeri fracti $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$. &c. Ratio, quam modo definivimus, si nempe consideretur, quomodo quantitas una alteram contineat, dicitur *geometrica*. Vocatur autem *arithmetica*, si excessum tantummodo quantitatis unius supra aliam consideremus. Duarum rationum æqualitas *proportio* dicitur vel *geometrica*, vel *arithmetica* pro diversa rationum qualitate. Quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur; & prima ad secundam esse dicitur, ut tertia ad quartam.

II. Numeri omnes in vulgari Arithmeti-

ca

ca decem notis, sive characteribus designantur; sunt autem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, quorum ultimus *cyphra*, sive *zero* appellatur. Harum notarum varia est significatio non solum ex diversa illarum figura, sed etiam ex diverso, quem occupant, loco. Quæ ad sinistram postremæ occurrunt, designant unitates; quæ proxime præcedunt, unitatum decadas; exinde centenarii sequuntur, millenarii; & sic deinceps per decadas, & centenarios progrediendo. Huic autem usui potissimum cyphra destinatur; cum nempe ipsa nullum designet numerum, auget tamen reliquarum notarum significationem, longius illas ab extremo versus sinistram numero removens. Sic unitatis nota, quæ sola unicam designaret unitatem, beneficio unius, vel duplicis cyphræ in secundum, aut tertium locum rejecta denas, unitates, aut centenas significabit. Breviores numeri facile leguntur; ita 247 exprimunt ducentas quadraginta septem unitates: at in prolixioribus numeris aliquo opus est artificio; ita si legere oporteat longiorem numerum

. 3 . 2 . 1 .
3 242 578 562 914 020 467 212; hunc ita divides a postremis numeris exorsus; nempe tres postremos divides a præcedentibus puncto superius apposito, tribus sequentibus adscribes 1, & sic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim appones, vel numerum; ita tamen, ut numeri unitate semper augeantur, quemadmodum hic factum vides. His peractis, quamlibet notarum classem perinde leges, ac si sola esset; & ubi punctum invenies, dic mille; ubi 1, dic decies centena millia, seu, ut vulgo loquimur, *millio-*

lionem; ubi 2, dic milliones millionum, sive *billiones*; ubi 3, dic *trilliones*, & sic deinceps. Sic itaque legendus est numerus præcedens: ter mille, ac ducenti quadraginta duo trilliones, quingenta septuaginta octo millia, ac quingenti sexaginta duo billiones, nongenta quatuordecim millia, ac viginti milliones, quadringenta sexaginta septem millia, bis centum, ac duodecim.

III. Vulgares explicavimus Arithmeticæ characteres, quorum auctores feruntur Astronomi Arabes: aliquid jam dicendum est de notis, quæ *Romanæ* appellantur. Notæ illæ, quarum in Physicis Institutionibus usus recurret, majusculis alphabeti litteris exprimuntur. His characteribus *Romanorum* nomen factum fuisse creditur; quod eos in monetis publicisque monumentis usurpaverint veteres Romani. Litteræ, quæ numeros Romanos componunt, sunt septem sequentes I. V. X. L. C. D. M. Harum notarum hæc est significatio. I. unitas: V. quinque: X. decem: L. quinquaginta: C. centum: D. quingenta: M. mille. Si duo I scribantur in hunc modum II, æquivalent binario; si tria scribantur III, significant ternarium; numerus quaternarius ita exprimitur IV; & numerus novenarius hoc modo IX: nempe unitas numeris V, X præfixa eos mulctat unitate. Verum ad exprimendos numeros vulgares 6. 7. 8. scribi solet VI. VII. VIII. Si numero L, vel C præmittatur X; numeri illi decade minuuntur; ita XL significat 40, & XC 90: contra autem si numerum L sequatur X in hunc modum LX; numerus præcedens augetur decade significans 60 &c. Aliquando numerus 400 expres-

fus

ſus fuit litteris CD, ſed raro. Præter litteram D, quæ exprimit 500, idem numerus ſignificatur etiam hoc modo IↃ. Ita etiam loco M, aliquando ſcribitur CIↃ. Eodem modo exprimi poteſt 600 per IↃC; & 700 per IↃCC &c. Si litteræ C, & Ↄ ante & poſt addantur; numerus CIↃ augetur in ratione decupla; ita CCIↃↃ ſignificant 10000, CCCIↃↃↃ 100000 &c. Hi erant communes Arithmeticæ characteres apud veteres Romanos, qui etiam numerum millenarium deſignare ſolebant adſcripta numeris millenario minoribus lineola; hoc modo $\overline{\text{V}}$, & ſignificat 5000; $\overline{\text{LX}}$, & deſignat 60000. Similiter $\overline{\text{M}}$ æquivalet 1000000, & $\overline{\text{MM}}$ deſignat 2000000. A recentioribus nonnullis Scriptoribus variationes aliquæ fuerunt adhibitæ; ita litteris IIX deſignant 8, litteris IICIX exprimunt 89. Qua ratione horum numerorum ope computationes ſuas inverint veteres Romani, nos omnino latet. Aliquam procul dubio habuerunt Arithmeticam, quam quidem invenire, aut aliam non multum diſſimilem ſubſtituere, problema eſt a viris Arithmeticæ & antiquitatis ſtudioſis ſolvendum.

IV. Quoniam numeri nihil aliud ſunt, quem magnitudinum rationes quædam certis ſignis diſtinctæ; evidens eſt, Arithmeticam, ſive ſcientiam numerorum eſſe artem diverſas illas rationes inter ſe combinandi, illaſque certis characteribus diſtinguendi. Hinc naſcuntur Arithmeticæ operationes præcipuæ. Etenim diverſæ numerorum combinationes huc revocari poſſunt, ut nempe mutuus eorum exceſſus, vel modus, quo ſe invicem

continent, expendatur, & aſſignetur. Ex his autem intelliguntur mox explicandæ quatuor vulgares Arithmeticæ operationes: *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, *Diviſio*.

V. Additio vocatur illa Arithmeticæ operatio, qua plures numeri ſimul colliguntur; Subtractio autem dicitur operatio, qua numeri a ſe invicem ſubtrahuntur. Ita ſi addantur 2 & 3, ut efficiantur 5; vel minor numerus 2 a majori 3 ſubtrahatur, ut remaneat 1; in primo caſu dicitur additio, in altero autem ſubtractio. Patet, in additione, & ſubtractione conſiderari mutuum numerorum exceſſum; etenim in additione exceſſus ſummæ ab alterutro numero innoteſcit; in ſubtractione autem mutua numerorum differentia inveſtigatur. Multiplicatio appellatur illa Arithmeticæ operatio, qua idem numerus ſibimetipſi pluries additur; ita ſi 3 per 4 multiplicari debeat, idem eſt, ac ſi 4 ſibi ipſi ter addatur, vel 3 ſibi ipſi quater adjungatur; prodibitque 12. Diviſio eſt Arithmeticæ operatio, in qua numerus unus ab alio ſubtrahitur, quantum fieri poteſt; ita numerus 4 ex 12 ter ſubtrahi poteſt. Itaque patet, in multiplicatione, & diviſione conſiderari modum, quo numeri ſeſe mutuo continent. Ita in præcedenti multiplicatione innoteſcit, numerum 12 ter continere numerum 4; per diviſionem autem demonſtratur, numerum 4 ter contineri in 12. Ex his evidens eſt, multiplicationem nihil aliud eſſe, quam additionem compoſitam; atque etiam diviſio nihil aliud eſt, quam compoſita ſubtractio. Quare ad duas dumtaxat revocari poſſunt quatuor vulgares Arithmeticæ operationes. Hinc Arithmeticæ operationes accu-

rate

rate omnino definivit Nevvtonus: *compositionem*, & *resolutionem arithmeticam*; quæ quidem definitio ex ipsa arithmeticarum operationum natura derivatur. Quamvis autem numeri sint rationes geometricæ, ex dictis tamen evidens est, additionem, & subtractionem proprie revocari ad rationem arithmeticam; multiplicationem vero, & divisionem ad rationem geometricam referri. Cæterum præter vulgares quatuor enumeratas operationes, aliæ sunt plurimæ; sed hæ omnes ad primas referuntur, ut ex dicendis manifestum fiet. Hic autem regulas Arithmeticæ generatim considerasse satis sit; patet autem, hanc, quam tradidimus Arithmeticæ notionem, Arithmeticæ speciosæ communem esse. Itaque licet Arithmeticæ nomen generatim usurpemus; illud tamen de Arithmetica speciosa intelligi quoque volumus. Jam vero universam Arithmeticæ utriusque doctrinam breviter, & distincte explicemus, quantum postulant nostrarum Institutionum necessitas, atque injuncta brevitas.

CAPUT II.

De quatuor primis Arithmeticæ operationibus in numeris integris.

I. PRima Arithmeticæ operatio dicitur *Additio*, quæ ex præcedentibus satis intelligitur. Totam hujus operationis praxim declarabimus, atque demonstrabimus.

PROBL. I.

Numeros integros addere, ſive in unam ſummam colligere.

Exempl.
23561
392
8768
49321
82042

II. ADdendi proponantur numeri in hoc exemplo expreſſi. Quatuor numerorum columnas ita alias aliis adſcribe ſerie deſcendente, ut unitates unitatibus ſubjiciantur, decades decadibus, & ſic de reliquis. Tum infra omnes numeros ducta lineola, & a poſtrema columna exorſus dic, 1 & 8 efficiunt *9*; *9* & 2 efficiunt 11; 11 & 1 efficiunt 12 Habes ergo in hac columna unam decadem unitatum, ac præterea duas unitates. Quare ſcribe 2 in columna unitatum, & decadem rejice in ſequentem decadum columnam dicens; 2 & 1 efficiunt 3; 3 & *6* efficiunt *9*; *9* & *9* efficiunt 18; 18 & *6* efficiunt 24; hoc eſt, duas decadas decadum, ſive duo centenaria, & 4 decadas; ſcribe ergo 4 in loco decadum, & duo centenaria in ſequentem columnam rejice: eodemque pacto in hac, & reliquis operare; & tandem invenies ſummam quæſitam 82042

Demonſtratio ex tota operationis ſerie facile patet. Etenim in unaquaque columna numeri ita colliguntur, tanquam ſi eſſent unitates, ex eaque ſumma tot unitates in columnam proxime ſequentem rejiciuntur, quot decades collectæ ſunt: quod quidem faciendum eſſe evidens eſt, cum nota quælibet ab unitatum columna ad reliquas progrediendo valorem habeat in columna ſequente decuplo majorem, quam in præcedente. Igitur

tur in hac operatione adduntur singulæ unitates, singulæ decades, singula centenaria. Quare patet hujus operationis ratio, quæ quidem utpote per se evidens, nullo vulgarium axiomatum auxilio indigere videtur. Quamvis enim demonstrationis severitati maxime studeamus; eorum tamen imitari nolumus obscuram diligentiam, qui res evidentes ita demonstrant, ut, perfecta demonstratione, de iis fere dubitare liceat, quæ antea perspicue credebantur.

PROBL. II.

Numeros integros subtrahere.

III. Secunda Arithmeticæ operatio dicitur *Subtractio*, cujus totum hoc est artificium. Ut numerum datum a dato numero subtrahas, numerum subtrahendum alteri, a quo subtrahi debet, ita subjicies, ut unitates unitatibus respondeant, decades decadibus, & sic de reliquis. Tum ab unitatibus exorsus quamlibet inferiorem notam a superiori subtrahe, & residuum scribe infra lineolam, habebis numerum, qui sit datorum numerorum differentia. Si vero occurrat, inferiorem notam superiori majorem esse, hanc augebis decem unitatibus, easque mutuas accipies a proxime sequenti nota, quam proinde deinceps habebis tanquam unitate mulctatam. Subtrahendus proponatur numerus 4245 a numero 23897. Auferendo 5 ex 7 relinquitur numerus 2; auferendo 4 ex 9 relinquitur 5, 2 ex 8 remanet 6. At cum numerus 4 ex 3 subduci nequeat; adjice huic denas

Exempl.
23897
4245
19652

nas unitates, & auferendo 4 ex 13, residum habebis 9. Tum vero notam superiorem proxime sequentem unitate mulctabis; hanc enim ab ea mutuam accepisti, ut denis unitatibus præcedentem augeres: habebis ergo residum 1; ideoque residuum totum 19652.

Demonstratio satis per se constat; cum unitates ab unitatibus auferantur, decades a decadibus &c. Nam, quod in hoc exemplo numerus 3 decem augeatur unitatibus, & numerus sequens 2 unitate mulctetur, ratio patet. Hæc nempe unitas in numero 3 decadi unitatum æquali est, earum scilicet, quibus constat idem numerus 3; quare etiamsi unitatem dumtaxat ille amittat, huic tamen decem accedunt. Simili modo si plures sequerentur cyphræ, ex quibus proinde nulla fieri potest subtractio; ex numero proxime antecedenti mutua accipienda est unitas, quæ in cypham sequentem translata decem unitatibus æquivalet. Rursus ex illa decade unitas in secundam cyphram transfertur, atque ita deinceps. Quare patet, cyphram ultimam decem unrtatibus æqualem esse, cæteras vero antecedentes æquari novenario. Itaque evidens est hujus operationis ratio, nec vulgarium axiomatum ope facilius intelligitur.

Ex additionis, & subtractionis natura manifestum est, duas illas operationes sibi mutuam probationem conferre, & sese invicem confirmare. Etenim cum residuum in subtractione sit ipsa uumerorum differentia; patet, minorem numerum residuo, sive differentiæ additum majori numero æqualem esse. Item cum additio sit plurium numerorum aggre-

ga-

gatum, si ex aggregato alteruter numerus auferatur; numerum alterum remanere, necessum est. Si igitur explorare velis, utrum additio rite peracta sit, subtractione utendum est; contra autem ad explorandam subtractionem additio adhibenda.

PROBL. III.

Numeros integros multiplicare.

IV. Tertia Arithmeticæ operatio vocatur *Multiplicatio*, in qua, ut patet ex capite præcedenti, toties sumitur numerus multiplicandus, quoties unitas continetur in numero, per quem debet multiplicari. Singulæ notæ in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt, 3 in 4 ductum, sive 4 ter sumptum 12 efficere. At si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe, ita ut unitates unitatibus subjiciantur. Deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica, initio a postremis facto. Decadas, quæ inter multiplicandum colliguntur, sepone adjiciendas producto ex eadem numeri inferioris nota in proxime sequentem superioris. Facta, quæ emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris, infra lineolam seorsim notentur; ita ut uniuscujusque unitates subjiciantur numero, per quem multiplicatio peragitur. Si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quæsitum.

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Sribe 43, sub 235; tum ducta lineola, dic 3 in 5 efficiunt 15, scribe 5 sub numero multiplicante 3, & unam decadem sepone adjiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9; cui si addas 1 habebis unam decadem, & nullas præterea unitates, scribe igitur 0: & facto ex 3 in 2, quod est 6, adjiciens 1 scribe 7: rursus dic 4 in 5 efficiunt 20; scribe 0, ita ut multiplicatori 4 subjaceat, & facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adjiciens 2 habebis 14; scribe igitur 4: & seponens 1, dic 2 in 4 efficiunt 8, & adjecto 1, scribe 9. Demum ducta linea, collige in unam summam hos numeros ita dispositos; eritque 10105 productum quæsitum.

Exempl.
235
43
705
940
10105

Demonstratio evidens est ex ipsa notarum arithmeticarum natura, si nempe in memoriam revocetur, numerorum characteres decuplo plus valere in locis anterioribus, quam in posterioribus; illico enim manifestum fiet, toties sumi in producto numerum multiplicandum, quoties unitas continetur in numero, per quem fit multiplicatio.

PROBL. IV.

Numeros integros dividere.

V. QUarta Arithmeticæ operatio vocatur *Divisio*. Cum numerus datus per alium datum dividendus proponitur, eo reducitur quæstio, ut inveniatur quoties in numero dividendo contineatur divisor, totiesque auferatur: atque totidem unitates scribantur in numero, qui idcirco *quotus* dicitur. Hæc ergo genuina est divisionis notio:

notio: nempe dividendus eſt ad diviſorem, ut quotus eſt ad unitatem; vel dividendus eſt ad quotum, ut diviſor eſt ad unitatem.

Proponatur dividendus numerus 10105 per 43. Numero dividendo diviſorem præfige lineola interjecta; tum operationem inſtituens in primis notis dividendi, quæ exhibeant quantitatem diviſori æqualem, vel proxime majorem; dic, quoties 43 continentur in 101, quotus erit 2. Scribe ergo 2, lineola pariter interjecta, ex altera parte dividendi, & factum ex 2 in 43, ſive 86 aufer ex 101 & reſiduo 15 notam appone 0, quæ in dividendo proxime ſequitur quantitatem jam diviſam 101. Dic iterum, quoties 43 continentur 150, quotus eſt 3, quem ſcribe, ut ante; & factum ex 3 in 43, ſeu 129 aufer ex 150. Reſiduo 21 adnecte ſequentem notam dividendi 5: & dic iterum, quoties 43 continentur in 215, quotus erit 5, quem ſcribe cum aliis quoti notis, & aufer ex 215 factum ex 5 in 43, ſive 215. Cum nihil ex ea diviſione ſuperſit; patet, numerum 235 illum accurate eſſe, qui oritur ex diviſione 10105 per 43.

Exempl.

43 (10105) 235
86
——
150
129
——
215
215
——
000

Tota operationis ratio facile patet, ſi animadvertamus, in hujuſmodi operatione rem perinde ſe habere, ac ſi quæreretur, quota pars quantitatis alicujus ſingulis hominibus obveniret, ſi eam ex æquo tot hominibus diſtribui oporteret, quot unitates continet diviſor. Nam in tota operationis ſerie inquirimus, quot unitates, decades &c. ſin-

gulis

gulis dari poſſint; iiſque datis, quæ dari poſſunt, quot adhuc diſtribuendæ ſuperſint. Facile autem intelligitur poſt quamlibet ſubtractionem peractam id, quod relinquitur, antequam ulteriorem dividendi notam adjicias, diviſore minorem eſſe oportere; nam ſi reſiduum æquale foret, vel majus, diviſor in quantitate jam diviſa pluries contineretur, quam indicet numerus in quotum relatus. Omnis difficultas in eo ſita eſt, quod in numeris longioribus ſtatim non pateat, quoties diviſor in dividendi notis contineatur; & tentamine utendum eſt; diviſor nempe per numeros ab 1 ad 9 multiplicandus eſt, atque numeri ex hac multiplicatione producti debent comparari cum dividendi notis, & explorandum eſt, quinam ex illis numeris ſit proxime minor; pones in quoto numerum, in quem ductus diviſor hunc efficit numerum, ipſum vero numerum ex dividendi notis ſubduces. Cæterum qui in Arithmetica ſatis fuerit exercitatus, facile conjiciet ex primis utriuſque numeri notis, dividendi ſcilicet, & diviſoris, ipſum numerum pro quoto eligendum.

Probe autem obſervari debet in quoto notarum valor, ut in aliis Arithmeticæ operationibus jam antea monuimus; at in præſenti operatione, quæ eſt omnium difficillima, rem brevi exemplo illuſtrabimus. Dividendus proponatur numerus 416 per 2; ſtatim patet, in quoto contineri centenarios, decadas, & unitates. Dividatur jam 4 per 2, quotus erit 2, qui per 2 multiplicatus producit 4, quo ſubtracto ex 4 fit 0. Patet ergo, diviſum fuiſſe 400 per 2. Progredior deinde ad notam ſequentem 1, hoc eſt dividi

vidi

vidi debet 10 per 2. Statim autem video, 2 in 10 decies non contineri; quare scribitur 0 in quoto; tum ut indicetur, quotum nullam decadem continere, tum ut primæ quoti notæ 2 suus servetur centenarii valor. Tandem progrediendum ad 6, qui numero præcedenti 1 apponitur, divisoque 16 per 2, habetur quotus 8, ideoque quotus totus est 208. Hinc generatim intelligitur, qua de causa in quoto scribatur cyphra, imo & plures cyphras aliquando scribi oporteat. Hac divisione peracta, nulla relinquitur in dividendo nota; si autem aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adjicienda est fractio. Ita si in exemplo præcedenti haberetur numerus 417 per 2 dividendus, ita ut numerum 417 ex æquo hominibus 2 partiri debeas, singuli acciperent nummos 208, & dimidiam partem nummi, quæ ita scribitur $\frac{1}{2}$.

Ex hactenus explicatis generatim etiam patet, satis esse primam dividendi notam per primam divisoris notam dividi, si in divisore, & dividendo idem sit notarum numerus. Verum si dividendus plures contineat notas, persæpe necesse est duas primas dividendi notas primæ divisoris notæ subjici; idque fieri debere evidens est, quoties datus notarum numerus in divisore majorem habet valorem, quam habeat æqualis notarum numerus in dividendo: verum si duæ adhibeantur dividendi notæ, per primam divisoris notam divisio semper fieri potest. Quare generatim ostenditur, sumptis in dividendo tot notis, quot sunt in divisore, vel etiam, quod aliquando necesse est, nota una insuper adjecta, notarum numerum

in

in quoto unitate excedere residuum notarum numerum in dividendo. Inde autem facile colligitur, nullum in quoto numerum novenario majorem esse posse. Etenim divisor decies æqualis esse non potest assumptæ dividendi parti. Nam si divisor decies sumatur, nota una augetur; at pars dividendi assumpta habet notarum numerum notarum divisoris numero æqualem, vel unitate majorem. In primo casu evidens est, dividendi partem assumptam minorem esse divisore decies sumpto, cum notarum numerum habeat unitate minorem: in secundo casu pars dividendi assumpta, si nota una versus dextram minuatur, minor fit divisore. Quare dividendus hac nota iterum auctus minor est divisore decies sumpto.

Divisionis rite peractæ argumentum habebis, si divisorem in quotum ducas, redeatque divisus numerus; nam si non redeat, manifestum est, alicubi errorem esse admissum; quod quidem patet ex ipsa divisionis natura; cum dividendus toties contineat divisorem, quoties unitas continetur in quoto: quare cum quotus exprimat, quoties divisor contineatur in dividendo, si divisor per quotum multiplicetur, dividendum ipsum restitui necesse est. Cæterum patet, si divisorem accuratum habere non licuit, facto ex divisore in quotum addendum esse residuum ex ultima divisionis subtractione, ut redeat divisa quantitas. Contraria ratione evidens est, multiplicationis rite peractæ haberi argumentum, si productum dividatur per multiplicandum, aut per numerum multiplicatorem: in primo casu quotus fit multiplicator; in casu autem altero quotus est mul-

multiplicandus. Cum enim divisio sit multiplicationi contraria, per divisionem resolvitur, quod in multiplicatione componitur, & contra. Cæterum in multiplicatione, & divisione compendia plurima usus docebit; hinc monere satis erit, multiplicationis per plures cyphras faciendæ compendium haberi, si in producto scribantur tot cyphræ, quot occurrunt in multiplicando, & multiplicatore simul; multiplicatio autem aliarum notarum fiat secundum regulas prædictas. Item in divisione, si divisor, & dividendus cyphras contineant; in dividendo delendæ sunt tot cyphræ, quot occurrunt in divisore, quæ etiam in ipso divisore deleri debent, & reliqua operatio peragenda, ut antea. Notandum autem est, compendium illud valere dumtaxat, si cyphræ fuerint ultimæ tum divisoris, tum dividendi notæ; quod quidem manifestum est ex cyphrarum natura.

Scholium. In præsenti capite sermonem habuimus dumtaxat de numeris homogeneis, sive ejusdem speciei; at pari facilitate in numeris heterogeneis, seu diversæ speciei absolvuntur operationes arithmeticæ. Antequam vero operationes illas explicemus, definiendum est, quid per numerum *concretum*, quid per *abstractum* intelligant Arithmetici. Numerus concretus dicitur, quo res aliqua determinata designatur, ita si dicas tres homines, tres horas, tres pedes &c. At si numerum 3 generatim enuntiaveris, nec rem aliquam designaveris, numerus vocatur abstractus. Jam in numeris diversæ speciei additio, & subtractio facile intelliguntur. Probe tenenda est diversa numerorum species:

cies:

cies: ita si addi debeant lineæ, pollices, pedes, exapedæ; sciendum est, lineas 12 pollicem unum æquare, pollices 12 pedem unum, & exapedam ex pedibus 6 constare. Ubi autem in linearum additione summa efficitur, quæ 12 excedit; tot unitates inter pollices referri debent, quot sunt numeri duodenarii; quod vero reliquum est, seu quod duodenario minus est, in linearum columna scribi debet; & ita deinceps de alia qualibet numerorum specie. Similiter in subtractione tota patet operationis ratio, si quantitas subtrahenda E. G. linearum numerus, justo major sit; jam ex quantitate præcedenti, pollicum scilicet, mutuo accipienda est unitas, quæ duodenario numero æquivalet, atque ita reliqua operatio peragenda. Illud unicum est discrimen inter operationes arithmeticas in numeris abstractis, atque heterogeneis peragendas, quod scilicet in numerorum abstractorum additione, vel subtractione unitas mutuo accepta decadi æquivaleat; at in numeris heterogeneis unitas, quæ mutuo accipitur, eum retinet valorem, qui speciei suæ respondeat. Hæc de additione, & subtractione.

Quod multiplicationem spectat, improprie omnino a quibusdam Arithmeticis proponi videtur concretorum numerorum multiplicationes. Ita ineptum est, quod faciunt aliqui, quærere productum ex nummis 3, juliis 3, assibus 3 in nummos 3, julios 3, asses 3. Etenim in eo sita est multiplicatio, ut data quædam quantitas datis vicibus sumatur, ac proinde multiplicator debet esse numerus abstractus. Qua ratione autem quantitates diversæ speciei per numerum abstra-

ctum

ctum multiplicentur, facile patet, si E. G. productum ex lineis in numerum abstractum majus fit numero duodenario, jam inter pollices rejici debent tot unitates, quot sunt numeri duodenarii; quod autem reliquum est, inter lineas scribendum. Porro quamvis in multiplicatione numerus abstractus esse debeat multiplicator, res tamen aliter se habet in divisione; nam dividendus semper censetur numerus concretus, divisor autem vel concretus, vel abstractus esse potest. Ita dividi possunt nummi *6* per nummos 2, hoc est, investigari potest, quoties 2 contineatur in *6*; quotus 3 erit numerus abstractus. Potest etiam dividi numerus concretus per numerum abstractum; ita nummos *6* dividere possumus per 3, hoc est investigare possumus tertiam partem nummorum *6*, & quotus erit numerus concretus, nempe nummi 2. Jam ut perspicua habeatur divisionis notio, ad ipsam definitionem redeamus. In divisione scilicet dividendus est ad divisorem, ut quotus est ad unitatem, vel dividendus est ad quotum, ut divisor ad unitatem. Probe autem observari debent illæ duæ proportiones; licet una, eademque videantur. Dividendus tanquam numerus concretus semper habetur, concretus autem, vel abstractus esse potest numerus divisor. In 1° casu quotus erit numerus abstractus, & locum habet prima proportio; in casu altero, ubi nempe divisor est numerus abstractus, quotus est numerus concretus, & locum habet proportio altera: quidem omnia exemplo facile licebit intelligere. Si nummi *6*, *numerus concretus*, dividantur per nummos 2, *numerum* itidem *concretum*; quotus erit numerus abstractus 3;

hic

hic enim non indicabit numerum nummorum, ſed exprimet, quoties diviſor continetur in dividendo: erunt nempe *6* nummi ad 2 nummos, ut numerus abſtractus 3 eſt ad unitatem abſtractam 1. Dici autem non poſſet, *6* nummi (*numerus* ſcilicet *dividendus*, & *concretus*) ſunt ad quotum 3 (*numerum abſtractum*); ut nummi 2 (*numerus diviſor*, & *concretus*) ad 1 (*numerum abſtractum*). Talis proportio nullam in mente relinqueret diſtinctam notionem; cum enim numerus concretus, & numerus abſtractus diverſi ſint generis; nulla inter eos comparatio, & ratio proprie dicta inſtitui poteſt.

Si diviſor ſit numerus abſtractus, ut in caſu ſecundo, quotus eſt numerus concretus, & ſecunda valet proportio. Ita ſi dividantur *6* nummi per numerum abſtractum 3, quotus erit nummi 2, (numerus ſcilicet concretus); habebiturque hæc proportio; numerus concretus, nempe *6* nummi, erit ad quorum, nummos 2; ut diviſor 3 ad 1. Id vero notandum eſt, in utraque proportione, unitatem eſſe ſemper numerum abſtractum. Quare diviſio ſub duplici ratione conſiderari poteſt; vel enim quæritur, quoties quantitas una in altera ejuſdem generis quantitate continetur, & hic eſt primus caſus, vel quæritur quantitas, quæ certis vicibus in alia ejuſdem generis quantitate contineatur, & hic eſt caſus ſecundus. Facile autem patet ex demonſtratis, quomodo numeri concreti per abſtractos dividantur, aut etiam concreti per concretos, etiamſi fuerint diverſæ ſpeciei. Etenim ſi concreti per abſtractos dividantur, initio ſumpto ab iis, qui majorem habent valo-

valorem, divisio ex regulis præscriptis instituatur; si autem supersit aliquid, ad minorem speciem reducatur. E. G. si residui fuerint pedes, reducantur in pollices, atque iterum divisio de more fiat. Si concretos numeros diversæ speciei per concretos itidem diversæ speciei dividi oporteat, jam numeri tum dividendi, tum divisoris ad minimam speciem deprimantur, quod per multiplicationem fieri manifestum est; atque divisio fiat eodem modo, ac in numeris abstractis. Cæterum in multiplicatione, & divisione quantitatum diversæ speciei varia adhiberi possunt operandi compendia, quæ sine fractionum doctrina intelligi non possunt. Divisionis notionem ex genuinis principiis jam hausimus. In operationibus arithmeticis abstrahi solet a concretis abstractisque numeris, an concreti sint vel abstracti, ad majorem operationum facilitatem: verum ad formandam earumdem operationum ideam distinctam, necesse est, ut numeris sua deinde restituatur conveniens notio.

CAPUT III.

De quatuor præcedentibus operationibus in Arithmetica speciosa absolvendis.

PROBL. I.

Quantitates litterales addere.

I. Quantitatibus litteralibus præfiguntur signa, quorum significationem præmitti omnino necessum est. Signum additionis est +, signum autem subtractionis

nis est $-$, æqualitas duabus lineolis exprimi solet hoc modo $=$. Ita $a = a$, $a + a = 2a$, $a - a = 0$. Quantitas addenda dici solet quantitas *positiva*; quantitas autem subtrahenda vocatur *negativa*. Si quantitati litterali præfigatur numerus aliquis, hic *coefficiens* vocatur, ita in quantitate litterali $2a$ numerus 2 coefficiens appellatur. Si autem quantitas litteralis nullum numerum præfixum habeat, jam unitas tanquam illius coefficiens censeri debet; ita $a = 1a$, ut patet. Quantitates litterales dicuntur *similes*, si easdem contineant litteras, & eumdem earumdem litterarum numerum, etiamsi diversis coefficientibus notentur, $+ 2a$, & $- 5a$ sunt quantitates similes; at *dissimiles* sunt quantitates a & b, atque etiam quantitates a & aa. Quantitas aliqua *ex pluribus terminis composita* dicitur, quæ plures habet litteras signo $+$ vel $-$ connexas, Ita $a + b$ constat ex duobus terminis & *binomium* dicitur; $a + b + c$ ex tribus terminis, & *trinomium* vocatur. Quantitas ex unico termino composita dicitur *quantitas simplex*, atque etiam *monomium*; ita a, ab, abc sunt quantitates simplices.

His præmissis definitionibus, quantitatum litteralium additio jam explicanda est. Si quantitates simplices fuerint, tota operationis ratio statim patet. Ita si a & a addi debeant, habebitur 2a; si addere oporteat a & 2a, summa erit 3a, & ita deinceps; satis nempe est in hoc casu addi coefficientes, & coefficientium summam quantitatibus litteralibus præfigi, eodem servato signo $+$ vel $-$, si quantitates eodem signo afficiantur. At si diversa fuerint signa, jam coefficiens

ficiens minor a majori subtrahi debet & differentia cum majoris coefficientis signo scribenda.

Id quidem evidens est ex negativarum, & positivarum quantitatum natura. Etenim quantitates positivæ quantitatibus negativis sunt directe contrariæ. Quare si quantitates addendæ similes sint, signisque contrariis affectæ, vel se se omnino destruunt, vel aliqua ex parte tantum; nempe si quantitas una sit altera major, destruitur in majori quantitate pars minori æqualis, & residuum est quantitatis utriusque differentia, quæ quidem differentia signo majori quantitati præfixo affici debet. Ita evidens est, quantitates $+ 5df$ & $- 3df$ reduci ad $+ 2df$; nam $+ 5df$ est quantitas df quinquies sumpta, & $- 3df$ est quantitas df ter subtracta; sed eadem quantitas quinquies sumpta, & ter subtracta reducitur ad quantitatem bis sumptam. Similiter $+ 5fm$ & $- 6fm$ reducitur ad $- 1fm$, vel ad $- fm$. Nam $- 6fm$ est quantitas fm sexies subtracta, & $+ 5fm$ est eadem quantitas quinquies addita, ac proinde quantitas fm semel subtrahitur, & remanet negativa, seu fit $- fm$. Eadem ratione operandum est in aliis quantitatibus utcumque compositis. Quantitates addendæ ita disponuntur, ut similes termini sibi invicem respondeant. Singulæ partes seorsim considerantur, ut simplices, & additio fit, ut modo præscriptum est; summa autem infra lineolam scribitur. Sub terminis, qui sese mutuo destruunt, scribi solet stellula, vel

Exemplum.

$3ab$	$- 5cs$	$- 4dr$	$+ 2s$
$- ab$	$+ 4cs$	$+ 4dr$	$- s$
$2ab$	$- cs$	*	$+ s$

zero,

zero. Tota operatio patet ex præsenti exemplo. Si quantitates aliquæ fuerint dissimeles, eas signo $+$ vel $-$ connectendas esse evidens est. Ita si addi oporteat a & b, vel a & $-b$, scribendum est $a + b$, $a - b$.

PROBL. II.

Quantitates litterales subtrahere.

II. IN subtractione considerantur quantitates singulæ subtrahendæ, tanquam si haberent signum ei, quod habent, contrarium, & fiat summa ex legibus jam præscriptis; nempe in quantitate subtrahenda mutetur signum $+$ in $-$, & $-$ in $+$, & additio de more fiat. Ita subtrahitur b ex a, scribendo $a - b$. Si $b - c$ ex $a + c$ subtrahi oporteat, scribitur $a + c - b + c = a - b + 2c$. Simili modo in quantitatibus utcunque compositis operandum est. Quantitas subtrahenda inferiori loco scribitur, alia autem, ex qua subtractio fieri debet, supra apponitur; deinde mutatis signis, ut jam dictum est, tota quantitatum series scribitur, & postea reducitur, ut factum est in additione; habebitur quantitatum differentia infra lineolam scribenda. Quod autem in quantitate subtrahenda signum $-$ mutetur in $+$, ratio facile patet. Si ex a subtrahi debeat $b - d$, scribaturque primo $a - b$, subtractio justo major est; subtrahenda enim non proponitur tota quantitas b,

Exempl.

$$\begin{array}{l} ab + abb - dd \\ ab - bc + dd. \\ \hline ab + abb - dd - ab + bc - dd \\ = abb + bc - 2dd. \end{array}$$

b, ſed b mulctata quantitate d; quare juſto major eſt ſubtractio, & exceſſus eſt ipſa quantitas d, quæ proinde cum ſigno poſitivo + reſtitui debet, & ſcribendum eſt a — b + d. Id vero numerorum exemplo illuſtratur. Si ex numero 6 ſubtrahendus proponatur numerus 5 — 3, ex præſcripta regula ſcribendum eſt 6 — 5 + 3, hoc eſt 4, reductione facta. Quod evidens eſt. Si enim ſcriberes 6 — 5 — 3; ſubtraheres 8 ex 6, quod quidem faciendum non proponitur; cum enim ſit 5 — 3 = 2, ex numero 6 ſubtrahi debet dumtaxat numerus 2. Cæterum patet, in calculo litterali non ſecus, ac in arithmetico additionem, & ſubtractionem ſibi mutuam probationem præbere; ita ut operatio una per alteram mutuo exploretur.

PROBL. III.

Quantitates litterales multiplicare.

III. Signum multiplicationis eſt ×, quod tamen in multiplicatione facta per litteras omitti ſolet, & ſola conjunctio litterarum ſine ſigno multiplicationem ſignificat. Sit a = 2, b = 10; erit ab = 2 × 10 = 20. Si eadem quantitas per ſeipſam multiplicetur, apponitur poſt ipſam paulo ſupra numerus, qui exprimat, quoties ſcribenda eſſet. Ita aa = a^2, aaa = a^3. Cavendum, ne confundatur a^2 cum 2a; ſit a = 5, erit a^2 = 25, 2a = 10; ſit b = 2, erit $(a + b)^2 = \overline{a + b}^2$ = 7 × 7 = 49; parentheſis autem ( ), vel lineola —— producta deſignat, totam quantitatem a + b in

b in seipsam multiplicari. Numerus supra positus est *index*, seu *exponens potentiæ*, ut vocant, vel *potestatis*, seu *dignitatis* quantitatis ipsius, & exprimit, quot vicibus unitas per illam quantitatem multiplicetur. Ita $1 \times a = a^1$; $1 \times a \times a = a^2$; $1 \times a \times a \times a = a^3$ &c.

In quantitatum compositarum multiplicatione scribenda est altera quantitas sub altera, tum tota prima quantitas multiplicanda per unum ex terminis secundæ, scribendo productum in una linea, deinde tota prima quantitas per aliam; & ita porro, scribendo singula producta in singulis lineis, ac notando similes terminos diversorum hujusmodi productorum alios sub aliis; deinde omnium linearum colligenda summa. Omnium vero hujusmodi operationum patet ratio; multiplicatio enim fit per partes non secus, ac in quantitatibus simplicibus. Porro in multiplicatione quatuor operationis partes considerari debent, nempe signa, coefficientes, litteræ, & exponentes; hinc quatuor præscribuntur regulæ. 1. Si signa fuerint eadem, positiva scilicet, vel negativa, productum fit positivum: contra autem si fuerint diversa, productum est negativum. Ita $+ \times + = +$; $+ \times - = -$; $- \times + = -$; & $- \times - = +$. 2. Coefficientes in se invicem multiplicantur. 3. Litteræ ordine alphabetico scribuntur, nullo interposito signo. 4. Si quantitas aliqua exponente afficiatur, eaque multiplicari debeat per eamdem litteram exponente itidem affectam, littera illa semel in producto scribenda est; ita ut tamen hujus quantitatis exponens æqualis fiat exponentium summæ. Operatio

ratio tota patet exemplo. Quantitas multiplicanda superiori loco scribitur. Deinde multiplicatur per a, & producta singula infra lineolam scribuntur. Postea fit multiplicatio per $-$ b, productaque infra apponuntur, & tandem productorum partes singulæ, ut moris est, in summam colliguntur. Id vero pro majori additionis facilitate observandum est, ut scilicet similes productorum partes aliæ sub aliis scribantur, & sibi invicem respondeant, ut in additione præscripsimus. Quod spectat tres ultimas leges, hæ satis patent ex antea demonstratis; verum quod attinet signorum doctrinam, in bono lumine collocari debet.

Exempl.

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ac - bc \\ \quad a - b \\ \hline a^3 + 2a^2c - abc \\ - a^2b - 2abc + b^2c \\ \hline a^3 - a^2b + 2a^2c - 3abc + b^2c \end{array}$$

Signorum multiplicatio, quæ tyronibus difficultatem afferre solet, ex ipsa quantitatum negativarum natura intelligi potest. Dum quantitas positiva $+$ a multiplicatur per aliquem numerum positivum $+$ n, sensus est, quantitatem $+$ a toties sumi, quoties unitas continetur in n; atque proinde productum fit na. Si $-$ a multiplicari debeat per $+$ n, sensus est, $-$ a quantitatem negativam toties sumi, quoties unitas continentur in n; ideoque productum est $-$ na. Simili modo si multiplicetur $+$ a per $-$ n, sensus est, quantitatem a toties subtrahi, quoties unitas continetur in $-$ n; ideoque productum est negativum, seu $-$ na. Si $-$ a multiplicare oporteat per $-$ n, sensus est, $-$ a toties subtrahendum esse, quoties unitas est in $-$ n, sed subtractio quantitatis

negativæ $-a$ æquivalet additioni $+a$; quare productum est $+na$. Nemo non videt, productum ex quantitate positiva in positivam fieri positivum. Sed alii casus hoc modo rursus illustrari possunt. Cum sit $+a-a=o$, si multiplicetur $+a-a$ per n, productum debet esse o. Jam vero primus producti terminus est $+na$, ergo terminus alter debet esse $-na$, qui destruat primum terminum $+na$, ita ut productum sit $+na-na=o$. Quare $-a \times +n = -na$. Simili modo, si multiplicetur $+a$, & $-a$ per $-n$, primus producti terminus est $-na$; quare terminus alter est $+na$; alioqui termini duo sese mutuo non destruerent, quod tamen fieri debet, cum sit $a-a=o$. Ergo $-a \times -n = +na$.

PROBL. IV.

Quantitates litterales dividere.

IV. Signum divisionis est lineola interposita dividendum separans a divisore: ita $\frac{a}{b}$ designat, a dividi per b; divisio etiam designatur interpositis binis punctis hoc modo a: b. Verum his signis utendum est dumtaxat, si divisio accurate fieri non possit; quod primum illustrabimus exemplo quantitatum, quæ unico constant termino. Si proponatur dividenda quantitas a^2bc per a^2c, erit $\frac{a^2bc}{a^2c}=b$; ac proinde quotus

erit

erit b. Simili ratione $\frac{6a^2 bc}{2a^2 c} = 3b$. At $\frac{10a^2 b}{6a^2 c} = \frac{10b}{6c}$. In hoc sita est tota divisionis operatio, ut ex dividendo, & divisore expungantur litteræ utrique communes, reliquæ autem pro quoto habeantur. Si autem quantitates litterales coefficientibus afficiantur, evidens est, divisionem institui debere non secus, ac in Arithmetica vulgari. Porro licet in dividendo, & divisore deleantur litteræ communes; non tamen putandum est, quotum ex quantitate per seipsam divisa esse $= 0$; ita $\frac{abc}{abc}$ non est $=$ 0; delentur quidem litteræ omnes, sed quantitati litterali præfixus semper intelligitur coefficiens 1; sic $\frac{abc}{abc} = \frac{1abc}{1abc} = \frac{1}{1} =$ 1. Et quidem dum dividitur abc per abc, quæritur quoties abc continetur in abc. Sed quantitas quælibet semel in seipsa continetur. Quare in hoc casu quotus est semper unitas. Quod signorum leges spectat, eædem omnino sunt, quæ pro multiplicatione; nempe si $+$ dividatur per $+$, & $-$ per $-$; quotus signo $+$ afficitur; contra autem si dividatur $+$ per $-$, vel $-$ per $+$, quotus afficitur signo $-$. Tota explicatæ operationis ratio evidens est ex ipsa divisionis natura; cum enim productum ex divisore in quotum dividendo æquale esse debeat; manifestum est, quotum ex divisione quantitatis negativæ per negativam oportere

tere esse positivum. Ponamus enim, esse negativum, jam productum ex quoto negativo in divisorem negativum foret positivum, ac proinde non rediret quantitas dividenda, quæ ponitur negativa. Simili ratione demonstrantur aliæ signorum leges.

Eodem plane modo operandum est in aliis divisionibus utcunque compositis. Ita si dividi oporteat $9ab^2 - 15a^2b + 6a^3$ per $-3ab + 2a^2$. Singuli termini ita disponi debent, ut sumetur divisionis initium ab illo termino, qui ad maximam evectus est potestatem, & ita per gradus progrediendo, ut hic factum vides.

Exempl.

$$
\begin{array}{l|l}
6a^3 - 154^2 b + 9ab_2 & 2a^2 - 3ab \\
6a^3 - 9a^2 b & 3a - 3b \\
\hline
- 6a^2 b + 9ab^2 & \\
- 6a^2 b + 9ab^2 & \\
\hline
\quad * \qquad * &
\end{array}
$$

Itaque dividas $6a^3$ per $2a^2$: prodit quotus $3a$, per quem divisor totus multiplicatur, productumque $6a^3 - 9a^2b$ subtrahas ex dividendo; residuum fit $-6a^2b$, cui addas $9ab$, & dividere pergas, ut ante: quotus est $-3b$; productumque ex hoc quoto & divisore $-6a^2b + 9ab^2$ iterum auferas ex dividendo, nihilque remanet. Quare accurata est divisio. Si autem peracta operatione aliquid supersit, ita ut divisor, & reliqua pars dividendi nullas communes habeant quantitates, jam divisio accurate fieri non potest, sed quoto invento jungenda est fractio: de fractionibus autem tractabitur in proximo capite.

Sæpe contingit, divisionem in infinitum continuari, & tunc quotus fit, ut vocant, *series infinita*. Exemplo sit unitas dividenda per $1 - a$. Operatio est hujusmodi.

I

$$\begin{array}{l|l} \underline{\quad 1 \quad} & \text{quotus est} \\ 1 - a & 1 + a + aa + a^3 + a^4 \ \&c. \\ \overline{\quad} & \text{in infinitum.} \\ + a & \\ \underline{+ a - aa} & \\ + aa & \\ \underline{+ aa - aaa} & \\ + aaa \ \&c. & \end{array}$$

Hæc pauca exempla satis sint. Cæterum patet, multiplicationem, & divisionem in quantitatibus litteralibus non secus, ac in numeris sibi mutuam probationem conferre, ita ut multiplicatio per divisionem, & viceversa divisio per multiplicationem confirmetur.

Schol. In hoc capite frequens fuit mentio de quantitatibus negativis, quarum genuinam notionem paucis iterum explicare non abs re erit. Si duæ quantitates magnitudine æquales ad partes directe oppositas simul, & in eodem subjecto conjunctæ intelligantur, sese mutuo destruunt, illarumque effectus nihilo æqualis est. Ita si potentiæ duæ æquales in partes directe oppositas agunt, virium illarum effectus nullus est. Pari modo si aliquis habeat 100 nummos, totidemque alteri debeat; jam illi 100 nummi, si ad hujus hominis possessionem referantur, pro nihilo considerari debent. Si autem quis 100 nummos habeat, & 200 alteri debeat, jam possessio hujus hominis negativa est, &,

ut ita dicam, nihilo minor. Si aliquis ad propositum locum iter facturus, ad partem directe oppositam progrediatur; jam hujus hominis iter tanquam negativum, & minus nihilo haberi debet, si ad finem propositum referatur. Igitur probe tenendum est, quid intelligatur per quantitatem negativam, & nihilo, ut dicunt, minorem. Quantitas negativa non minus realis est, quam quantitas positiva; sed nihilo minor dicitur, quatenus positivæ quantitati opponitur; juncta scilicet quantitati positivæ ipsam minuit, quem quidem effectum, hanc nempe diminutionem, ipsum *zero* non producit. Quare quantitas negativa ratione effectus tantum, & *relative*, non autem *absolute*, nihilo minor dicitur. Hunc loquendi modum a nonnullis usurpatum ita explicavimus, ut nihil difficultatis tyronibus facessere possit.

CAPUT IV.

De iisdem operationibus in numeris fractis.

I. NUmeri fracti definitionem jam in primo Capite tradidimus. Si divisor excedat dividendum, duo numeri a se invicem, interposita lineola, separantur ita, ut dividendus supra lineolam, & divisor infra scribantur in hunc modum $\frac{3}{4}$, – &c. Similiter si quantitas aliqua litteralis per aliam dividenda proponatur, & divisio fieri non possit, eodem modo scribuntur duæ quantitates; ita $\frac{a}{b}$ significat quotum ex a

per

per b; tales autem quoti *fractiones* vocantur. Quantitas superior dicitur *numerator*, inferior autem *denominator* appellatur. Denominator exprimit numerum partium, in quas totum aliquod divisum fingitur; numerator autem designat, quot ejusdem partes accipiantur, vel, quod idem est, quoties una ex illis partibus sumatur; ac proinde pars illa considerari potest tanquam unitas aliqua. E. G, fractio $\frac{3}{4}$ nihil est aliud, quam pars quarta alicujus totius ter sumpta; hæc autem pars quarta tanquam unitas altera haberi etiam potest.

II. Ex fractionum natura intelligitur, qua ratione numerus integer ad fractum reducatur, atque etiam ad denominatorem datum. Ita si numerus 3 reducendus proponatur ad fractionem, cujus denominator sit 4; multiplicetur 3 per 4, scribaturque $\frac{12}{4}$, erit hæc fractio æquivalens ternario, ut patet; cum numerus 3 multiplicetur, simulque dividatur per 4. Sed tales fractiones, in quibus numerator major est denominatore, pro veris fractionibus non habentur, atque *improprie* dumtaxat ita appellantur. Pari ratione si quantitas a reduci debeat in fractionem litteralem, cujus denominator sit b; habebitur $\frac{ab}{b} = a$.

Ex his etiam patet, quomodo fractiones, quæ diversum habent denominatorem, ad eumdem redigantur. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$: multiplicetur fractio $\frac{a}{b}$ per d, simul-

que dividatur per d, erit $\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{a}{b}$. Simili modo multiplicetur fractio $\frac{c}{d}$ per b, simulque dividatur, erit $\frac{c \times b}{d \times b} = \frac{c}{d}$. Itaque generatim fractiones ad eumdem denominatorem reducuntur, multiplicando numeratorem unius per denominatorem alterius, & viceversa, scribendoque pro denominatore communi productum ex utroque denominatore. Evidens est, hanc operationem eamdem esse pro quolibet fractionum numero. Multiplicentur scilicet numeratores singuli seorsim sumpti per denominatores singulos, proprio excepto denominatore; producta singula dabunt numeratores singulos quæsitos. Deinde denominatores singuli in seipsos ducantur, habebitur denominator communis quæsitus: ita fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ reducuntur ad $\frac{ccd}{bcd}$, $\frac{bbd}{bcd}$, $\frac{ccb}{bcd}$. Patet, rem perinde se habere in numeris quibuslibet fractis; ita fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, *respective* equales sunt fractionibus $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$.

III. Hinc facile adduntur, & subtrahuntur fractiones; reducantur scilicet ad denominatorem communem, sumatur numeratorum summa, vel differentia, & subscribatur denominator communis. In illo casu habebitur additio, in hoc autem subtractio.

Ita

Ita $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} = \frac{ade + bce + ddb}{bde}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$. Similiter in numeris $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$: & $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16-15}{20} = \frac{1}{20}$. Fractiones ex integris, & fractis compositæ, qualis est $1\frac{5}{12}$, appellantur mixtæ. Ex his autem statim intelligitur, quomodo numeri integri, & fracti simul addi possint, vel a se invicem subtrahi. Integri ad fractos reducantur, & ad denominatorem communem, atque operatio fiat, ut ante. Quamvis autem additionis, & subtractionis operationes ex dictis sint manifestæ, demonstrari tamen possunt hoc modo. Sint fractiones duæ $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$ ad eumdem denominatorem reductæ, erit $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, & $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$, & $\frac{c}{b} = n$; erit, facta multiplicatione per b, $a = mb$, $c = nb$, & $mb + nb = a + c$; ac proinde $m + n = \frac{a+c}{b}$, hoc est

eſt $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$. Simili modo patet, eſſe $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = m - n = \frac{a-c}{b}$.

IV. Nulla reductione opus eſt, ubi fractiones multiplicare, & dividere oportet. In multiplicatione ſatis eſt numeratores, & denominatores invicem ducere; habebitur numerator & denominator fractionis quæſitæ, quæ erit productum ex datis fractionibus emergens. Contra vero ſi fractio per aliam fractionem dividenda ſit, numerator dividendæ per alterius denominatorem eſt multiplicandus, & illius denominator in hujus numeratorem ducendus eſt. Ita productum ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Quotus autem ex $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$. Etenim ponatur $\frac{a}{b} = m$; erit, ut ante, $a = bm$. Similiter ponatur $\frac{c}{d} = n$; erit $c = dn$. Jam demonſtrandum ſupereſt, eſſe $\frac{ac}{bd} = mn$, & $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$; quod quidem facile patet, ſubſtituendo loco a, & c illorum valores bm, & dn; erit enim in primo caſu $\frac{bdmn}{bd} = mn$; in caſu autem altero fiet $\frac{bdmn}{bd} = \frac{m}{n}$. Demonſtra-

tio

tio generalis eſt, ac proinde in numeris quibuslibet fractis eadem eſt operatio. Sic productum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{3}{8} = \frac{8}{48}$. Sic quotus ex $\frac{3}{6}$ per $\frac{2}{16} = \frac{48}{12} = 4$. Manifeſta quoque eſt operandi ratio, ſi numerus fractus per integrum multiplicari, aut dividi debeat; conſiderari enim debet numerus integer tanquam fractio impropria, in qua denominator eſt unitas, & reliqua peragenda, ut ante. Quare patet, in multiplicatione numerum integrum per numeratorem eſſe multiplicandum; contra autem in diviſione per denominatorem. Nec mirum eſſe debet, ſi fractio per fractionem diviſa præbeat numerum integrum; cum revera una fractio bis, ter, quater &c. in alia contineri poſſit. Itaque fractionis valor per multiplicationem minuitur, augetur per diviſionem; quod quidem paradoxum videtur iis, qui multiplicationis, & diviſionis naturam non ſatis attendunt.

Ex dictis etiam facile patet, *fractiones fractionum* ad multiplicationem referri: *fractionem fractionis* appellant fractionis alicujus partem. Ita ſi ſumantur $\frac{2}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, operatio illa ad diviſionem non pertinet, ſed ad multiplicationem. Etenim ſi ſumenda proponeretur dumtaxat pars $\frac{1}{3}$ fractionis $\frac{3}{4}$, multiplicandus eſſet denominator per 3, habereturque $\frac{3}{12}$. At ſumi non debet dumtaxat pars tertia, duæ tertiæ partes ſumendæ proponuntur, quare productum præcedens duplo majus fieri debet, hoc eſt, numerator

mul-

multiplicandus est per 2. Eodem modo reduci debent aliæ quotlibet fractiones fractionum, multiplicando numeratores singulos, & singulos denominatores.

Ex fractionum doctrina colligi possunt operationum arithmeticarum compendia plurima, si de quantitatibus variæ speciei agatur. E. G. Quæritur, quanti constiterint 35 mensuræ mercis alicujus, si mensuræ unius pretium sit 24 nummorum & assium 15. Multiplicentur primo 25 per 24, erit productum 840. Quoad alteram multiplicationis partem, considerari potest, esse 15 $=$ 10 + 5. Jam si asses 10 nummo æquivalerent, productum foret 35. At sunt pars decima dumtaxat nummi unius, quare 35 dividi debet per 10. Simili modo operandum est in ultima multiplicationis parte, atque emerget productum ex nummis, nummorumque partibus compositum. Ille operandi modus dicitur operatio per partes *aliquotas*. Partes autem aliquotæ quantitatis alicujus appellantur, quæ ipsam quantitatem accurate dividunt; secus autem partes *aliquantæ* vocantur. Cæterum exercitatio, atque attentio multa docebunt, quæ fusius explicare superfluum esset.

V. Explicatis Arithmeticæ operationibus in numeris fractis, jam superest, ut communes, si quos habeant, fractionum divisores inquiramus. Si numeri nullum habeant communem divisorem præter unitatem, numeri illi inter se *primi* dicuntur, cujusmodi sunt 1. 5. 7. 11. 19, quos sola unitas metitur. At numeri *compositi* appellantur, quos præter unitatem alii quoque numeri metiuntur; sic 12 componitur ex 2 &

6,

6, itemque ex 3 & 4. Quare 2. 3. 4. 6 metiuntur 12, ſeu aliquoties ſumpti 12 adæquant; illi autem numeri dicuntur *factores* ipſius muneri 12. Si igitur fractionis alicujus denominator ſit numerus compoſitus, & reſolvi poſſit in alterius fractionis denominatorem, inſtituta diviſione per numerum, qui ſit etiam numeratoris diviſor communis, jam licebit fractionem hanc ad minimos terminos deprimere, quod ita præſtari poteſt. Dividatur major numerus per minorem; ſi nihil ex diviſione ſuperſit, jam minor numerus eſt maximus diviſor communis. Si autem reſiduum aliquod fuerit, diviſor datus per hoc reſiduum dividatur; ſi diviſio accurate fiat, primum reſiduum erit maximus diviſor communis. Si autem diviſio non ſit accurata, ſed alterum maneat reſiduum, per hoc ſecundum reſiduum dividatur primum; ſi autem nullum ſuperſit tertium reſiduum, jam reſiduum ſecundum pro maximo diviſore communi haberi debet; atque ita progrediendum, donec nihil ſuperſit, atque ultimus diviſor erit maxima, ut vocant, communis duorum numerorum menſura, qua inventa fractio ex his duobus numeris compoſita ad minimos terminos reducitur. Exemplo ſit fractio $\frac{91}{294}$. Dividatur 294 per 91, neglectoque quoto 3, reſiduum eſt 21. Rurſus dividatur 91 per 21, iterumque neglecto quoto 4, reſiduum eſt 7. Tandem reſiduum primum 21 per alterum 7 dividatur; habetur quotus 3, & diviſio eſt accurata. Quare numerus 7 eſt maximus communis diviſor, per quem diviſis numeratore, & denominatore, fractio præcedens

in hanc ſimpliciorem abit $\frac{13}{42} = \frac{91}{294}$. Æquales autem eſſe fractiones illas, ex natura diviſionis omnino patet. At ſi diviſione inſtituta, ad unitatem tandem, ultimum reſiduum, perveniatur, jam nulla eſt menſura communis præter unitatem.

Eadem plane eſt operatio in quantitatibus litteralibus, in quibus tamen nonnulla adverti debent. Ordinatis, ut fieri ſolet, diviſoris, & dividendi terminis, obſervandum eſt, an ſinguli termini diviſoris, & dividendi poſſint dividi per monomium aliquod commune: tunc enim, facta diviſione, reponi debet diviſor ille, per quem deinde, facta operatione, multiplicabitur diviſor communis. Præterea dividi debet, ſi fieri poſſit polynomium utrumque per quantitates, quæ primum terminum accurate dividunt: negligitur autem diviſor ille, niſi idem ſit in duobus polynomiis. Tandem ſi coefficiens primi termini in diviſore non poſſit accurate dividere primum terminum in dividendo; ita multiplicari debet dividendus per quantitatem hanc, ut accurata ſuccedat diviſio: aut etiam, quod idem eſt, ut coefficiens ſimplicior fiat, quæritur maximus communis diviſor utriuſque coefficientis, per quem diviſor ipſe dividitur, dividendus autem per quotum diviſionis multiplicatur. Tota operationis ratio patet. Si enim multiplicetur, aut dividatur polynomium alterutrum per quantitatem aliquam, quæ accurate non dividat polynomium alterum; evidens eſt, non mutari communem polynomiorum diviſorem. Sed res exemplo fiet magis manifeſta. Sint polynomia duo

$$a^3 + bda + b^2d$$
$$- bba - bd^2 - d^2a$$
& $$a^3 + da^2 - ba - b^2d$$

Primum dividitur per secundum, quotus 1 negligitur: residuum autem est

$$- da^2 + bda + 2b^2d - d^2a - bd^2$$

Quia vero singuli termini sunt divisibiles per **d**, fit divisio; habeturque

$$- a^2 + ba + 2b^2 - da - bd$$

Per hanc quantitatem dividitur primus divisor, quotus fit $- a$; ut ante negligitur: & residuum est $ba^2 + b^2a - b^2d - bda$; quod divisum per b, fit $a^2 + ba - bd - da$; per quod residuum dividatur ultimus divisor, quotus est $- 1$, & residuum $2ba + 2b^2 - 2da - 2bd$: quod dividitur per $2b - 2d$, quotus est $a + b$, qui est ultimus divisor sine ullo residuo; ac proinde $a + b$ est maximus divisor communis.

Tota operationis series facile demonstratur paucis observatis. 1°. Mensura quælibet communis x quantitatum duarum a, & b metitur quoque illarum summam, vel differentiam $a \pm b$. Nam sit m quotus emergens ex divisione a per x; & n quotus ex divisione b per x: nempe $m = \frac{a}{x}$, & $n = \frac{b}{x}$; erit $a = mx$, & $b = nx$. Quare $a \pm b = mx \pm nx = (m \pm n)\, x$.... 2°. Si x sit mensura quantitatis alicujus, evidens est, eam fore mensuram ejusdem quantitatis utcunque multiplæ..... 3. Si b contineatur in a, quoties unitas continetur in m, sitque præterea residuum aliquod c; quantitas quælibet, quæ metietur a, & b, metietur quoque residuum c. Nam (ex hyp.) $a = mb + c$; quare $a - mb = c$. Sed x metitur b; ergo me-

metitur quoque mb ejus multiplum: ac proinde metitur quoque a — mb; ideoque c = a — mb. Si residuum c contineatur in b, quoties n continet unitatem; sitque præterea aliud residuum d ita ut b = nc + d, & b — nc = d; x metietur etiam d. Nam (ex hyp.) x metitur b, atque etiam c (ex dem.). Ergo metitur etiam nc, & b — nc = d. Quare cum subtrahendo b ex a, quantum fieri potest, residuum c metiatur x; itemque subtrahendo c ex b, quantum fieri potest, residuum d metiatur x; & ita deinceps de quolibet residuo: quantitas x communis mensura ipsarum a, & b metietur residuum quodlibet; residuum vero ultimum, quod præcedens residuum metitur accurate, erit communis mensura ipsarum a, & b. Nam ponamus, residuum illud esse d, quod contineatur in c, quoties unitas continetur in r: ergo c = rd. Præterea a = mb + c, b = nc + d; sed d metitur c; quare metietur etiam nc; & nc + d = b. Quia vero metitur b & c, metietur etiam mb + c = a; ideoque erit mensura communis inter a, & b. Tandem erit maxima communis mensura; nam mensura qualibet communis inter a, & b metitur aliam d (ex dem.): sed maxima mensura ipsius d est ipsa quantitas d; ergo erit maxima communis mensura inter a, & b. Demonstrata ergo est vulgata maximi communis divisoris regula.

VI. De fractionum communi divisore & numeris primis pauca addenda supersunt, quæ deinde utilitatis maximæ futura sunt. 1°. Si duo muneri a & b fuerint primi inter se, tertius autem numerus c metiatur primum a; hic erit primus respectu b. Nam si c,

si c, & b non essent numeri primi, haberent mensuram communem, quæ cum metiatur c, foret quoque mensura ipsius a, quam metitur c. Quare a, & b haberent mensuram communem contra hypothesim......

2. Si duo numeri a, & b sint primi respectu c; productum ab erit quoque numerus primus respectu c. Nam productum ex duobus numeris a & b nullos potest habere divisores, nisi vel numeros ipsos a, & b, vel partes illorum aliquotas, vel alterutrius numeri multiplos. Sed numeri a, & b non possunt esse divisores numeri c, cum respectu c sint numeri primi; ac proinde partes illorum aliquotæ divisores esse non possunt. Tandem si c dividi posset per numerum aliquem multiplum ipsius b, dividi etiam posset per ipsum numerum b (contra hyp.). Quare si a, & b sint numeri primi respectu c, productum ab erit quoque numerus primus respectu c: pari ratione si a, & c sint numeri primi inter se, erit etiam a^2 numerus primus respectu c; nam ponatur $a = b$, erit $ab = a^2$; ideoque a^2 erit numerus primus respectu c. Similiter c^2 erit numerus primus respectu a....

3. Si duo numeri a, & b sint primi respectu numerorum c, & d; producta ab, & cd erunt quoque numeri primi inter se. Nam ab est primus respectu c, & d; ergo cd erit primus respectu ab. Quare etiam si a & c sint numeri primi; erit a^2 numerus primus respectu c^2. Et generatim productum ex numeris primis quibuscumque divisum per productum ex aliis quibuscumque numeris itidem primis ad simpliciores terminos reduci non potest. Quare si $\frac{a}{b}$ sit fractio ad minimos ter-

terminos reducta; erunt quoque $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^n}{b^n}$ fractiones ad simplicissimos terminos reductæ; ac proinde fractio quælibet sive pura, sive mixta ad potentiam quamlibet evecta semper manet fractio.

Schol. Præter fractiones in hoc Capite explicatas considerari etiam debent fractiones, quæ *decimales* appellantur. Illæ scilicet fractiones pro denominatore habent unitatem cum tot sequentibus cyphris, quot sunt numeri in numeratore: atque eam ob causam non scribitur denominator, sed numerator dumtaxat, cujus numeris præfixa est virgula, alii punctum præfigunt, quod fit, ut numerator a numeris integris distinguatur. Ita ad experimendam fractionem $19\frac{4}{10}$ scribi solet 19. 4. Ad exprimendam fractionem $19\frac{4}{100}$ scribitur 19, 04; cyphra numero 4 præfixa indicat, denominatorem esse 100. Fractio $19\frac{4}{1000}$ ita exprimitur 19, 004. Ex fractionum decimalium significatione patet, primum numerum post virgulam designare decadas, secundum centenarios, & ita deinceps per decadas semper progrodiendo; sic 4, 217 $= 4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$. Fractionum decimalium utilitas maxima est ad obtinendum quotum proxime verum, si divisio accurate fieri non possit. E. G. Si dividendus proponatur numerus 147475 per 362, quotus invenitur 407 cum residuo 141, cui addatur o, dividaturque 1410 per 362, quotus erit

erit 3 cum novo residuo 324, cui iterum addatur 0, dividaturque 3240 per 362, quotus prodit 8 cum residuo 344, cui addatur 0; in nova tandem divisione quotus emergit 9; quod autem remanet 182, iterum dividi posset; sed operationis ordinem exhibuisse satis sit. Quare quotus est 407, 389, quem quidem accuratiorem esse, evidens est.

Eadem methodo fractio vulgaris in fractionem decimalem reducitur. Si fractio $\frac{3}{4}$ in fractionem decimalem reducenda proponatur, numeratori 3 addatur 0, dividaturque 40 per 4, quotus est 7 cum residuo 2, cui addatur 0, rursusque 20 per 4 dividatur, quotus est 5 sine ullo residuo; quare $\frac{3}{4} = 0,75$. Et requidem ipsa, cum sit 25 quarta pars numeri 100, numerus 75 erit $\frac{3}{4}$ ejusdem numeri 100. Hinc generatim patet, quo artificio fractio vulgaris ad decimalem reduci possit; multiplicetur nempe numerator fractionis datæ per 100, vel 1000 &c, productum illud divisum per denominationem erit numerator fractionis decimalis, cujus denominator est 100, vel 1000 &c. Sæpe tamen contingit, fractiones ad decimales accurate reduci non posse, etiamsi divisionum residuis plures utcunque cyphræ addantur. Id autem facile dignoscitur, si nempe ad idem residuum semper perveniamus, vel si iidem numeri eodem ordine redeant. Ita si fractionem $\frac{4}{7}$ ad decimalem reducere volueris, invenies 0, 5714285714285714 28 &c. nec unquam pervenies ad divisionem accuratam. Pari modo ad reducendam fractionem $\frac{5}{12}$ in decimalem, invenies 0, 416666 &c. In his autem casibus

bus duas, vel tres primas decimales adhibere satis sit, reliquæ autem negliguntur. Ita poni possunt $\frac{4}{7} = 0, 57$, & $\frac{5}{12} = 0, 416$.

Hæc quidem pauca satis esse possent iis, qui demonstrationis severitatem non quærunt; sed rem utilissimam generatim, & omnino accurate ostendemus. Sit $\frac{p}{q}$ fractio vulgaris reducenda ad fractionem decimalem $\frac{r}{10^n}$, in qua n exprimit cyphrarum nnmerum, ponaturque r numerus integer, & $r = \frac{p \times 10^n}{q}$.

Sed est $10^n = 2^n, 5^n$; non potest autem $\frac{p \times 2^n \times 5^n}{q}$ abire in numerum integrum r, nisi q æqualis sit alicui potestati ipsius 2, vel 5, vel 2×5, vel tandem producto ex aliqua potestate ipsius 2 in aliquam potestate ipsius 5, quæ tamen potestates sunt minores, quam n; ponitur enim, fractionem $\frac{p}{q}$ esse ad minimos terminos reductam, hoc est, p, &, q nullum habere divisorem communem. In alio quolibet casu fractio $\frac{p \times 10^n}{q}$ numquam fieri poterit numerus integer r. Attamen quo major erit n, hoc est, quo plures erunt cyphræ in denominatore, eo magis fractio $\frac{r}{10^n}$ accedet ad fractionem $\frac{p}{q}$. Si enim

enim $p \times 10^n$ per q dividatur, quotus inventus r, qui minor erit, justo major fiet, si unitate augeatur. Quare $\frac{r}{10^n}$ minor est, quam $\frac{p}{q}$, & $\frac{r+1}{10^n}$ major.

Quatuor Arithmenticæ operationes in fractionibus decimalibus eadem omnino ratione, qua in numeris integris tractantur; sed habenda est maxime ratio virgulæ, qua fractiones ab integris dirimuntur. Hæc virgula in eadem linea verticali jacere debet, si plures quantitates vel in unam summam colligendæ sunt, vel ab invicem subtrahendæ. Si vero multiplicatio instituitur, eum locum in producto occupare debet virgula, ut totidem post se notas relinquat, quot erant in utraque fractione. Tandem si divisio peragitur, dividendi numeri decimales notæ probe observandæ sunt; nam in quoto, & divisore simul totidem esse debent post virgulam notæ, quot erant in dividendo. Quatuor illarum operationum exempla exhibebimus.

Ad-

Additio.	Subtractio.
23, 304	49, 638
3, 9567	17, 16
149, 86	
175, 21207	32, 478
Multiplicatio.	Divisio.
	8, 445 = 2, 6
12, 35	3, 22
4 2	6, 44
24 70	2005
49 40	1932
73, 470	73

Unum autem in divisione notandum est. Si nempe in divisore plures occurrant notæ decimales, quam in dividendo, tunc decimalibus dividendi adjunges, quot volueris cyphras; ita ut tamen notæ decimales in dividendo plures sint, quam in divisore, ut nempe in quoto aliquæ decimales notæ haberi possint. Tota operationum illarum ratio statim manifesta fiet, si fractiones decimales vulgari modo exprimantur. Ita in exemplo divisionis præcedentis $8, 445 = \frac{8445}{1000}$ & $3, 22 = \frac{322}{100}$ Itaque dividi debet fractio prior per secundam; evidens autem est, cyphram unam dumtaxat in quoto adesse, & hinc facile intelligitur, cyphrarum numerum in quoto esse semper æqualem cyphrarum in divisore, & dividendo differentiæ. Generatim, quod multiplicationem spectat,

si 20n

si 10^n sit denominator fractionis unius decimalis, & 10^m alterius; denominator producti erit 10^{m+n}. Quare, omisso denominatore, productum habere debet tot partes decimales, seu numeros post virgulam, quot sunt unitates in $m+n$. Contraria ratione in divisione denominator non erit 10^{m+n}, sed 10^{m-n}; ideoque $m-n$ exprimet numerum cyphrarum, quæ post virgulam in quoto scribi debent.

CAPUT V.

De radicum extractione.

I. Explicavimus jam in Capite 2° quid sit *potestatum* formatio. Quantitatis alicujus *potestas prima*, vel *primi gradus* est quantitas ipsa solitarie spectata. Ita prima potestas ipsius a est a. Productum ex quantitate aliqua in seipsam dicitur *potestas secunda*, vel etiam *quadratum*: ita a^2 est quadratum. Ipsa autem quantitas dicitur *radix*, quæ vocatur *quadrata*, si potestas sit secunda, vel quadratum. Si quadratum in ipsam quantitatem ducatur, productum dicitur *potestas tertia*, vel *cubus*, ita a^3 est cubus ipsius a; quantitas autem dicitur *radix cubica*. Et generatim si quantitas evehatur ad potestatem, cujus index est n, habebitur potestas gradus n. In hoc autem Capite præsertim considerabimus radicum quadratæ, & cubicæ extractionem; quod ut clare fiat, ipsam quadrati, & cubi formationem primum investigabimus, atque deinde ad operationes arithmeticas recto ordine progrediemur. Sit quantitas litteralis $a+b$ ad quadratum evehenda, prodit $aa+2ab+bb$. Jam vero

ro quadrati hujus formationem, seu partes singulas expendamus. Quadratum binomii $a + b$ continet 1°. Quadratum aa primæ partis a. 2°. Productum $2ab$ ex duplo primæ partis in secundam. 3°. Quadratum partis secundæ, nempe bb. Simili modo si multiplicetur $a + b + c$ per $a + b + c$, orietur quadratum $a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$. In hoc quadrato rursus considerandæ sunt partes singulæ; continet 1°. Quadratum $a^2 + 2ab + b^2$ ex duobus primis terminis $a + b$. 2°. Productum ex duplo duorum priorum terminorum in tertium terminum $= 2a + 2b \times c$. Tandem continet quadratum c^2 tertii termini. Simili modo progredi licet pro alia qualibet quantitate ex pluribus, quam tribus terminis, composita; tales vero quantitates magis compositæ appellari solent *polynomia*.

Eadem omnino ratione intelligitur cubi formatio. Binomium $a + b$ ad 3^{m} potestatem evehatur, multiplicetur nempe quadratum $a^2 + 2ab + b$ per $a + b$, prodit cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Cubi hujus partes singulæ sunt 1°. Cubus primi termini, nempe a^3. 2°. Productum ex quadrato a^2 primi termini in triplum terminum secundum, scilicet $3a^2b$. 3°. Productum ex primo termino a in triplum quadratum secundi termini, nempe $3ab^2$. 4°. Cubus secundi termini scilicet b^3.

Simili modo operandum est pro trinomio $a + b + c$, invenieturque cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c$. In hoc autem cubo præter duorum primorum terminorum cubum, nem-

nempe $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, diligenter considerari debent aliæ partes. 1°. Productum ex triplo quadrato duorum primorum terminorum in tertium terminum c, nempe $3a^2c + 6abc + 3b^2c = \overline{a^2 + 2ab + bb} \times 3 \times c$. 2°. Tripla summa duorum primorum terminorum per tertii termini quadratum multiplicata, scilicet $3ac^2 + 3bc^2 = \overline{a + b} \times 3 \times c^2$. 3°. Tandem tertii termini cubus, nempe c^3.

II. Ex potestatum compositione facile colligitur illarum resolutio, sive radicum extractio. Sit quantitas litteralis $x^2 - ax + \frac{1}{4} a^2$, ex qua extrahenda sit radix quadrata. Sumatur primi termini radix quadrata x, cujus quadrato subtracto remanent termini duo $- ax + \frac{1}{4} a^2$. Deinde sumatur duplum ipsius x, per quod dividatur secundus terminus $- ax$, quotus fit $- \frac{1}{2} a$, qui multiplicetur per ax. Tandem fiat quadratum quoti $- \frac{1}{2} a$, atque producta illa ex residuo $- ax + \frac{1}{4} a^2$ subtrahantur, nihil remanet. Quare radix quadrata est $x - \frac{1}{2} a$. Tota operatio patet ex numero præcedenti.

Cæterum si radix plures habuerit quam duos terminos, jam duo primi termini post primam operationem velut unicus terminus considerari debent, & reliqua peragenda, ut ante, quod quidem patet ex demonstratis.

Proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate litterali $c^3 - 3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Ex primo termino extrahatur radix cubica, quæ est c, cujus cubus c^3 auferatur: remanent termini $- 3c^2y + 3cy^2 - y^3$. Jam quia notum est, secundum terminum multiplicari per triplum quadratum primi, sumatur ter-

mini c triplum quadratum, per quod dividatur secundus terminus $-3c^2y$, prodit quotus $-y$, qui erit secunda pars radicis. Quia vero cubus quilibet continet cubum ex duobus primis terminis radicis, sumatur cubus terminorum $c-y$, deinde a reliquis terminis auferatur, quo facto nihil remanet; ac proinde radix accurata est $c-y$.

III. Ex demonstrationibus præcedentibus facile patet radicum extractio in quantitatibus numericis.

Etrahenda sit radix quadrata, ut in præsenti exemplo. Numerum datum in classes divide, quarum singulæ duas notas contineant, initio a postremis facto: nihil autem refert, sive unica tantum nota constet prima classis, sive notis duabus. Quare radicem veram, aut proxime veram numeri 38, quæ in nostro casu est 6. Scribe 6 loco radicis, & ejus quadratum 36 aufer ex 38. Residuo 2 adjunge notas classis proxime sequentis 94, & hujus novi numeri postrema nota neglecta, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ, sive 12, contineatur in 29, invenietur 2; scribe ergo 2 in radice, & ex 294 aufer productum ex 2 in 122 nempe 244, remanet

Exempl.

```
38. 94. 89. (624, 09
36
———
294
122
244
———
5089
1244
4976
———
11300
12480
    0
———
1130000
124809
1123281
———
6719. &c.
```

50; huic autem residuo adnecte notas classis proxime sequentis 89. Rursus contempta novi numeri postrema nota, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ, scilicet 124, contineatur in 508, quotus erit 4, iterumque ex numero superiori aufer productum ex 1244 in 4, nempe 4976, residuum est 113. Quare radix proxime vera numeri propositi est 624; numerus autem ille foret perfecte quadratus, si numero 113 minueretur. Quamvis autem radix quadrata non sit accurate vera, ad eam tamen fractionum decimalium ope pro arbitrio licet accedere. Residuo 113 addantur cyphræ duæ, ut hic factum vides; & habeatur numerus 624 tanquam prima pars radicis, cujus duplum sumatur, nempe 1248; dividaturque 1130 per 1248, quotus est 0, quare scribe 0 in radice, & multiplica 12480 per 0, productumque 0 aufer ex 11300, remanent 11300, Huic residuo iterum addantur cyphæ duæ, sumaturque duplum radicis, nempe 12480, per quod dividatur 1130000, scribaturque quotus 9 in radice, per quam multiplicetur numerus 124809, productumque 1123281 auferatur ex 1130000, residuumfit 6719. Operatio rursus continuari posset; sed satis patet methodus, cujus ope radicem proxime veram obtinere licet, & ad eam magis ac magis accedere. Tota operationis ratio manifesta est ex fractionum decimalium naturam.

In hujus operationis serie idem notare oportet, quod in divisione observatum est, nempe si post adjectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis, duplum radicis in-

ventæ non contineatur in numero, qui per illud dividendus est; postrema hujus dividendi nota neglecta, cyphra scribenda est in radice, & classis proximæ notis duabus demissis, operatio continuanda. Evidens autem est, hanc operationem esse divisioni simillimam, in qua radix sit quotus, divisor vero sit duplum radicis postremo inventæ auctum nota, quæ deinceps investigatur. Hoc unum interest, quod in divisione divisor semper est idem, hic autem semper augetur; in divisione totus divisor cognoscitur, hic autem ignota est novi divisoris nota, quæ inquiritur; atque id in causa est, cur in hac divisione instituenda postrema dividenda quantitatis nota prætereatur. Si contingeret, divisorem esse majorem: V. G. in præsenti exemplo si productum ex 2 in 122 subtrahi non posset ex 294, jam in radice scribendus esset numerus proxime minor, & tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit; quare nulla correctione opus est. Unum tandem superest notandum, cur nempe post duplum radicis inventæ scribatur radix nova, & deinde numerus totus per radicem novam multiplicetur. Ita in præsenti exemplo post duplum primæ radicis 12 scribitur 2, totusque numerus 122 multiplicatur per novam radicem 2. Operationis ratio manifesta est; cum enim numerus 2 in radice duas exprimat decadas, hujus numeri quadratum versus sinistram promoveri debet, ut patet ex notarum arithmeticarum significatione.

Ad radicis cubicæ extractionem jam veniendum est. Pro radice cubica methodus est ad-

mo-

modum ſimilis, & iiſdem innititur principiis. Extrahenda ſit radix cubica, ut in præſenti exemplo. Diviſo numero in claſſes per ternas notas incipiendo a poſtremis notis, prima claſſis, quæ poterat continere vel tres notas, vel duas, in hoc caſu unicam continet. Quæratur radix cubica numeri 5 proxime minor, quæ eſt 1. Hujus cubus 1 ſubtrahatur a prima claſſe 5, reſiduum eſt 4, cui adnectatur claſſis ſequens, ut hic factum vides. Deinde ita dicendum, prima pars radicis 1 pro decade haberi debet, ſi conferatur cum ſecunda parte. Sumatur itaque numeri 10 quadratum 100, & per illius triplum 300 dividatur 4305, invenietur quotus 7; quilibet enim alius foret juſto major, ſi 7 excederet, ut patet operationem experiendo. Jam multiplicetur 300 per 7, habetur productum 2100. Dic præterea $7 \times 7 = 49$, & $49 \times 10 = 490$, poſtea $490 \times 3 = 1470$, quod ſcribe infra 2100. Tandem $7 \times 7 \times 7 = 343$, quod ſcribi debet infra 1470. Addantur numeri 2100, 1470, & 343; & ſumma 3913 auferatur ex numero 4305, reſiduum eſt 392, Demittatur claſſis tertia 472, & duæ primæ partes radicis, velut pars una, conſiderentur. Hæc autem pars, quæ eſt 17, æquivalet

Exempl.

```
5.305.472. (174, 4
1
______
4305
 300
______
2100
1470
 343
______
3913
______
 392472
  86700
______
 346800
   8160
     64
______
 355024
______
 37448000.
```

valet 170, si conferatur cum tertia parte quæsita. Sumatur hujus numeri 170 triplum quadratum 86700, per quod dividatur pars cubi reliqua 392472, prodit quotus 4, quem scribe in radice; multiplicetur divisor 86700 per 4, productum fit 346800, quod infra scribitur. Dicas deinde $4 \times 4 = 16$; $16 \times 170 \times 3 = 8160$, quod productum scribe infra 346800, atque infra scribi debet cubus ipsius 4, nempe 64. Addantur tres illæ quantitates; quarum summa 355024 ex reliqua cubi parte subtrahatur, residuum fit 37448. Quare numerus propositus non est cubus perfectus; sed ad radicem proxime veram licebit accedere, si residuo addantur tres cyphræ, ut in præsenti exemplo factum est; & eadem operatio deinde pro alio quolibet fractionum decimalium numero iteretur, magis ac magis accurata fiet radix inventa; illud autem observandum est diligenter, inventas radicis partes velut partem unicam tractandas esse, si pars alia investigari debeat.

In extractione radicis quadratæ, & cubicæ, diximns, tot esse radicis partes, quot sunt diversæ numeri propositi partes. Id vero demonstratione indiget. Quantitas quælibet ex duobus constans numeris unicam dumtaxat in radice partem habere potest. Consideretur numerus 99 omnium, qui duabus constent notis, maximus. Deinde radicem ex duabus notis compositam omnium minimam 10 consideremus; quadratum erit 100, quod numero 99 majus est, ac proinde radix duas notas continere non potest. Similiter quantitas omnium minima, quæ tres habeat notas, est 100, cujus radix quadrata est 10, quæ proinde duas continet notas; ac quanti-

tas

tas omnium maxima, quæ tres habeat notas est 999, cujus radix tres notas habere non potest; nam numerus omnium minimus tribus constans notis est 100, cujus quadratum fit 10000, quod quidem numerum 999 longe excedit. Eadem ratione ad aliam quamlibet numerorum seriem progrediendo facile intelligitur præscripta numerorum divisio in extrahenda radice quadrata: & huic numerorum divisioni partium numerum in radice respondere, evidens est. Idem simili ratiocinatione constat pro radice cubica. Evidens est, extractionem radicum simili ratione perfici in numeris fractis, extrahendo scilicet radicem propositam ex numeratore, & ex denominatore. In qualibet autem radicum extractione operationis rite peractæ facile habetur argumentum. Si radix sit quadrata, hæc in se ipsam ducatur, productoque addatur residuum, si aliquod fuerit facta operatione, restitui debet ipse numerus propositus. Similiter radix cubica ad cubum evehatur; id vero statim patet ex ipsa earumdem operationum natura.

IV. Sæpe ab extrahenda radice supersedemus, ubi veram invenire non licet, & quantitati propositæ præfigitur signum $\sqrt{}$ quod *radicale* appellant. Sic $\sqrt{3}$ significat radicem quadratam numeri 3. $\sqrt[3]{10}$ denotat radicem cubicam denarii; & hi sunt numeri, quos Arithmetici vocant numeros *surdos*, sive *irrationales*, aut etiam *incommensurabiles*. Quantitatibus litteralibus idem signum præfigitur, ita $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$ significant radicem quadratam ipsius ab, & radi-

cem cubicam quantitatis abc. Sed commoditatis ergo radix secunda, vel quadrata exprimi solet per $\frac{1}{2}$, radix cubica per $\frac{1}{3}$, ita $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{m}}$ significant radicem quadratam, cubicam, & radicem quamlibet indeterminatam m. Ut autem clara talium expressionum notio habeatur, meminisse oportet, quæ antea de exponentibus breviter dicta sunt. Ponamus a = b, erit $a^{\frac{1}{2}} = (bb)^{\frac{1}{2}}$. Præterea in quantitate $(bb)^3$ exponens 3 indicat, quantitatem bb ter scribendam esse, ac proinde $(bb)^3 = b^6$. Igitur eadem ratione in quantitate $(bb)^{\frac{1}{2}}$ exponens $\frac{1}{2}$ designat, litteram b dimidio minus sumendam esse, quam in bb; ac proinde semel tantum, quare $(bb)^{\frac{1}{2}} = b = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Idem patet de aliis quibuscumque exponentibus. Res autem itota magis ac magis illustrabitur, explicatis quatuor Arithmeticæ operationibus in quantitatibus surdis.

Quantitates surdæ adduntur, vel subtrahuntur facillime, si ejusdem sint exponentis, & eamdem habeant sub signo radicali quantitatem. Si autem res non ita se habeat, sæpissime contingit, quantitates surdas ejusdem ordinis ad eamdem quantitatem sub signo radicali posse revocari. Ita si addi, vel subtrahi debeant quantitates radicales $\sqrt{48abb}$, & $b\sqrt{75a}$, prima per reductionem mutatur in $4b\sqrt{3a}$, altera autem in $5b\sqrt{3a}$. Quare in 1° casu habebitur $9b\sqrt{3a}$,

3a, in altero autem b $\sqrt{3a}$. Totum reductionis artificium in eo consistit, ut numeri sub signo radicali positi quærantur divisores, inter quos ille eligatur, si quis fuerit, ex quo liceat radicem extrahere ejusdem ordinis, cujus est surda quantitas. Si aliquem ejusmodi divisorem invenias, ejus radicem præfige signo radicali, quo includatur tantummodo alter dati numeri coefficiens. Si autem nullus talis divisor inveniri possit, jam quantitates radicales in additione signo + connectendæ, in subtractione autem signo — separandæ.

Demum multiplicantur, & dividuntur quantitates irrationales non secus, ac rationales, & producto, vel quoto idem, quod prius erat, signum radicale præfigitur, quod quidem in utraque quantitate sit ejusdem ordinis. Ita si multiplicari debeant $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$, productum erit $\sqrt{aabc} = a\sqrt{bc}$. Ita si dividi debeat $ac\sqrt{bc}$ per $a\sqrt{b}$, erit $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}$. Patet autem, in multiplicatione delendum esse signum radicale, si æquales fuerint quantitates signo inclusæ; sic $\sqrt{a3c} \times \sqrt{a3c} = a3c$.

Quoniam sæpe contingit, quantitates radicales ad eumdem exponentem reducendas esse, observandū est, id facile præstari posse ex hactenus demonstratis. Ita quantitates duæ radicales $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, & $\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$ mutantur in $\sqrt[nm]{\frac{a^n}{b^n}}$ & $\sqrt[nm]{\frac{c^n}{{}^n}}$;

quod patet; nam quantitates illæ ad poteſtates n, m reſpective evehuntur, & ſimul deprimuntur. Probe autem notandum eſt diſcrimen inter quantitatum multiplicationem, illarumque poteſtatem. Ita ſi multiplicari debeat a^{3} per a^{2}, productum fit $a^{3+2} = a^{5}$. Si autem quantitas a^{3} ad ſecundam poteſtatem evehi debeat, habetur $a^{3\times 2} = a^{5}$; & generatim quantitas a^{n} ad poteſtatem n evecta ſit a^{mn}. Quare multiplicatio fit per *indicis* additionem, poteſtas autem per multiplicationem. Contraria ratione diviſio fit per *exponentis* ſubtractionem, & radicis extractio per exponentis diviſionem. Ita $\frac{a^{5}}{a^{2}} = a^{6-2}$. At ſi ex a^{6} extrahenda ſit radix quadrata, erit $a^{\frac{2}{6}} = a^{3}$, & generatim pro diviſione $\frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$; at pro radicis n extractione habetur $a^{\frac{m}{n}}$. Si quantitates ſint ſimplices, brevius per exponentes, quam per ſignum radicale, exprimuntur.

V. Quantitates irrationales, ſive incommenſurabiles ſæpe in hoc capite nominavimus; revera autem tales dari quantitates, evidens eſt ex capite præcedenti, in quo demonſtravimus, fractionem ſive puram, ſive mixtam in fractionem ſemper abire, etiamſi ad poteſtatem quamlibet evehatur. Ergo numerus integer, cujus radix quadrata, cubica &c. non eſt numerus integer, nullam fractionem nequidem mixtam pro radice habere poteſt, ac proinde hujus numeri radix eſt

est incommensurabilis. Itaque numeri incommensurabiles non sunt numeri proprie dicti. Et re quidem ipsa, cum per numerum nihil aliud intelligamus, quam rationem quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem, in omni ratione, vel numero existere necessum est partem aliquotam, quæ sit utrique quantitati communis; at quantitates inter se incommensurabiles tali carent mensura; ita $\sqrt{2}$ non est numerus proprie dictus, quia talis quantitas proprie non existit, eaque inveniri non potest. Imo fractiones proprie non dicuntur numeri, nisi quatenus ad numeros integros revocantur. Et quidem fractio $\frac{3}{4}$, quæ exprimit quartam partem totius alicujus ter sumptam, ipsa ad numeros integros refertur; hæc enim quarta pars velut alia unitas consideratur, ut antea observavimus. Rem arithmetico exemplo illustrabimus. Si ex numero 7 extrahenda proponatur radix quadrata, hæc invenitur minor quam 3; cum $3 \times 3 = 9$, & major quam 2, cum sit $2 \times 2 = 4$. Igitur radix quadrata numeri 7 continetur intra limites 2 & 3; ac proinde si posset determinari, ea foret æqualis numero 2, & alicui numero fracto, sed fieri non potest, ut fractio mixta per se ipsam multiplicata producat numerum integrum, ut antea demonstravimus. Ergo numerus 7 pro radice habere non potest neque numerum integrum, neque fractum. Idem patet de alio quolibet numero integro, cujus radix non est numerus integer.

Schol. Secundæ dumtaxat, & tertiæ potestatis compositionem, ac resolutionem in præsenti Capite explicavimus; at rem ge-

nε.

neratim, & breviter, quantum licet, pro alia qualibet dignitate conſiderabimus. Ex hactenus explicatis manifeſtum eſt, eodem modo formari altiores cujuslibet gradus poteſtates. Ita ad formandam quarti gradus poteſtatem multiplicari debet cubus per ſuam radicem, & ſic deinceps. Jam in ſingulis terminis exponentes, & coefficientes diligenter obſervemus. In poteſtatis cujuslibet compoſitione primus terminus a binomii cujuslibet $a + b$ evehitur ad poteſtatem quæſitam V. G. a^2 ſi poteſtas ſecunda fuerit. In aliis ſequentibus terminis exponens quantitatis a per unitatem decreſcit, & in ultimo termino evaneſcit. Ita in ſecunda poteſtate habetur $2ab + b^2$. Contra autem poteſtas termini b in primo termino non reperitur, ſed in 2°. termino illius exponens eſt unitas, in 3°. termino eſt 2, & ita creſcit per gradus, donec in ultimo termino exponenti poteſtatis quæſitæ æqualis fiat. Quare iiſdem gradibus, quibus decreſcunt exponentes ipſius a, creſcunt exponentes quantitatis b, atque in utraque quantitate exponentium ſumma ſemper eadem eſt, & poteſtatis quæſitæ exponenti æqualis; quod quidem in poteſtate qualibet experiri licet. Ita poteſtas 6 binomii $a + b$, invenitur $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$; in qua obſervare eſt, exponentes quantitatis a decreſcere ſecundum ſeriem numerorum 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; contrario autem ordine creſcere exponentes quantitatis b, nempe hoc modo 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; ſummaque exponentium in utroque termino eſt ſemper 6. Jam ſupereſt, ut ſingulorum terminorum coefficientes obſervemus. Dividatur coefficiens

ciens præcedentis termini per exponentem ipsius b in termino dato, & quotum multiplica per exponentem ipsius a in eodem termino auctum unitate. Ita in præcedenti exemplo, ubi termini sunt a^6, a^5b, a^4b^2, a^3b^3, a^2b^4, ab^5, b^6, coefficiens primi termini est unitas, coefficiens secundi est $\frac{1}{1} \times \overline{5+1} = 6$, tertii termini coefficiens $\frac{6}{2} \times \overline{4+1} = 3\times 5 = 15$, coefficiens termini quarti est $\frac{15}{3} \times \overline{3+1} = 5\times 4 = 20$. Et simili modo invenientur coefficientes alii 15, 6, 1.

Ex hac constanti exponentium, & coefficientium serie generatim exhiberi potest binomium $a+b$ ad potestatem quamlibet m evectum. Ita terminorum series se habebit, non consideratis coefficientibus, a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$ $a^{m-4}b^4$, quæ series continuari debet, donec exponens quantitatis b evadat m. Coefficientes autem ex præcedenti regula hoc ordine progredientur 1, m, $m\times\frac{m-1}{2}$, $m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}$, $m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}$ & ita deinceps. Quare hæc habetur generalis formula $\overline{a+b}^m = a^m + ma^{m-1}b + m\times\frac{m-1}{2}\times a^{m-2}b^2 + m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times a^{m-3}b^3$ &c. Simili modo invenitur formula pro binomio $\overline{a-b}^m$, hoc

hoc ſolum obſervato diſcrimine, quod terminus debeat eſſe negativus, ſi exponens quantitatis b ſit numerus impar. Ita in cubo $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ſecundus, & quartus termini ſunt negativi; ratio autem eſt evidens, cum negativa exiſtente quantitate multiplicationum numerus impar productum efficere debeat negativum. Formula eadem omnino ratione componi poſſet pro trinomio $a + b + c$, ponendo $a + b = n$, & ita deinceps pro polynomio quolibet. Præcedens formula, quæ poteſtatum compoſitionem exhibet, earum quoque reſolutionem repræſentare poteſt. Ita radix quadrata binomii $a + b$ nihil eſt aliud, quam poteſtas binomii $a + b$, cujus exponens $\frac{1}{2}$. Quare ponatur in formula præcedenti $m = \frac{1}{2}$, habebiturque $\overline{a+b}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times b \times a^{\frac{1}{2} - 1} + \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} \times b^2 \times a^{\frac{1}{2} - 2}$ &c. Si quantitas ex pluribus, quam duobus, conſtet terminis: E.G. ſi extrahenda ſit radix quadrata ex quantitate $1 + 2c + c^2$. Fiat $a = 1$, $b = 2c + c^2$. Eadem adhibita formula, factiſque debitis reductionibus per vulgares Algebræ regulas, invenitur radix $1 + c$, ut oportet. Si autem quantitas propoſita nullam habeat radicem accuratam, hujus formulæ ope ad radicem proxime veram licet accedere. Exempla duo breviter proponemus. Sit $aa + b$ quadratum imperfectum, ex quo extrahenda ſit radix quadrata, habebitur $(aa + b)^{\frac{1}{2}} = aa^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times b \times aa^{\frac{1}{2} - 1} + \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} \times b^2 \times$

aa

$\overline{aa}^{\frac{1}{2}} \frac{-2}{2}$ &c. $= a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3}$ &c. Simili modo si ex cubo imperfecto $a^3 + b$ extrahenda sit radix cubica, erit $(a^3 + b)^{\frac{1}{3}} = a + \frac{a}{3a^3} - \frac{b^2}{9a^5}$ &c. Itaque ad radicem proxime veram accedere possumus per series infinitas, dummodo series illæ sint *convergentes*, hoc est, si termini perpetuo decrescant. Sit n ordo, quem terminus aliquis in præcedenti serie occupat, terminus ille invenietur esse ad terminum proxime sequentem, ut 1 ad $\frac{b}{a} \times \frac{m - n + 1}{n}$; ac proinde ut series sit convergens, oportet $b \times (m\text{-}n + 1)$ esse semper minorem, quam na. Ita in exemplo proposito, ad habendam radicem quadratam proxime accuratam, terminus $b \times (\frac{1}{2} - n + 1)$ positive sumptus minor esse debet, quam naa, existente n numero integro. Simili modo ad habendam radicem cubicam quam proxime in exemplo præcedenti, oportet terminum $b \times (\frac{1}{3} - n + 1)$ positive sumptum semper minorem esse, quam na^3; quod quidem diligenter observandum est in præcedentis formulæ usu.

CAPUT VI.

De Proportionibus.

I. IN memoriam revocanda est explicata cap. 10. rationis, & proportionis definitio. *Ratio* dicitur ea duarum quantitatum *habitudo* qua ad se invicem referuntur; *geometrica* dicitur, si in ea relatione considere-

mus,

esse producto ex summa primi, & ultimi in dimidium terminorum numerum. Ita si numerus terminorum dicatur n, erit omnium summa $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$.

III. Cum differentia communis terminorum in progressione arithmetica primum terminum non afficiat; patet, hujus differentiæ coefficientem in quolibet dato termino æqualem esse numero terminorum, qui terminum datum præcedunt. Quare in ultimo termino x habebitur $\overline{n-1} \times b$, nempe $x = a + \overline{n-1} \times b$. Igitur cum omnium terminorum summa sit $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$, ea quoque invenitur $= \frac{2an+n^2b-nb}{2} = (a+\frac{nb-b}{2}) \times n$. E. G. Series arithmetica 1 + 2 + 3 + 4 + 5 &c. ad 100 terminos producta $= \frac{2 \times 100 + 10000 - 100}{2} = 5050$. At si progressionis primus terminus fuerit o, erit propressionis summa æqualis dimidio producto ex ultimo termino in numerum terminorum. Nam in hoc casu cum sit a = o, summa terminorum, quæ generatim exprimitur per $\overline{a+x} \times \frac{n}{2}$ in hanc abit $\frac{nx}{2}$. Unde patet, summam numeri cujuslibet terminorum in progressione arithmetica, cujus primus terminus est o, æqualem esse dimidio producto ex terminorum numero in terminum maximum. E. G. Progressio Arithmetica $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9+9+9+9+9+9+9+9+9+9}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$.

IV.

IV. Si quotus ex duabus primis quantitatibus æqualis ſit quoto ex duabus ultimis; quatuor illæ quantitates ſunt *geometrice proportionales*, ut patet ex præcedenti definitione. Tales ſunt numeri 2, 6, 4, 12, & quantitates a, ar, b, br. Ex ipſa proportionis geometricæ natura evidens eſt, productum ex terminis extremis æquale eſſe producto ex mediis; ſic a × br = ar × b, ut patet. Quare datis tribus terminis facile invenitur quartus geometrice proportionalis: multiplicando ſcilicet duos medios terminos, productumque dividendo per primum, quotus erit quartus terminus quæſitus; ita datis tribus quantitatibus a, ar, b, invenitur quarta $\frac{ar \times b}{a}$ =. At ſi proportio ſit continua, ita ut ſecunda quantitas ſit primæ rationis conſequens, & ſimul ſecundæ rationis antecedens, ſimili ratiocinatione patet, ſumendum eſſe hujus quantitatis quadratum, illudque per primam quantitatem eſſe dividendum. Hæc autem quantitas, quæ antecedentis, & conſequentis vices gerit, vocatur *media proportionalis*, taliſque proportio ita exprimi ∺ a. b. c, nempe hoc ſcribendi modo ſignificatur, b eſſe mediam proportionalem. At media proportionalis arithmetica ita deſignatur ÷ a. b. c. Patet autem, in hac proportione ſummam extremorum æqualem eſſe termino medio bis ſumpto.

Ex demonſtratis de proportione geometrica pendet vulgatiſſima Arithmeticæ operatio, quæ *regula trium*, vel etiam *regula aurea* propter eximiam utilitatem appellari ſolet. Per hanc regulam datis tribus terminis invenitur quartus proportionalis. In hac autem ope-

operatione probe observari debet terminorum ordo. Et primo quidem consideranda est quantitas, quæ est ejusdem generis cum quantitate quæsita. Ex quæstionis natura intelligitur, an quantitas data sit major, vel minor quantitate quæsita; si major sit, jam maxima ex aliis duabus quantitatibus in terminorum ordine ad sinistram scribi debet; at si minor sit, tunc duarum aliarum quantitatum minima ad sinistram, alia autem ad dexteram collocari debet. Constituto autem convenienti terminorum ordine; jam ex præscripto regulæ productum ex secundo termino in tertium per primum terminum dividi debet. Tota res exemplo perspicua fiet. Hæc proponatur quæstio. Si triginta operarii dierum 12 spatio opus aliquod absolvant; quæritur necessarius operariorum numerus, ut idem opus 18 diebus absolvatur. Quoniam quæritur operariorum numerus, primum considerandus est numerus 30; statim autem vides, numerum illum datum majorem esse numero quæsito; quare numerus 18 ad sinistram collocari debet, numerus autem 12 ad dexteram, atque ita operatio peragitur hoc modo $18 : 30 = 12 : \frac{30 \times 12}{18} = 20$.

V. Pro varia terminorum ordinatione in proportione geometrica diversa ab Arithmecis inventa fuerunt nomina. At ex prima terminorum ordinatione aliæ omnes facile inferuntur. Si primus terminus dicatut esse ad tertium, ut secundus ad quartum, argumentari dicimur *alternando*. Si dicatur secundus ad primum, ut quartus ad tertium, tunc dicitur *invertendo*. Si summa terminorum

pri-

primi, & ſecundi refertur ad ſecundum, ut ſumma terminorum tertii, & quarti ad quartum, inferre dicimur *componendo*; contra autem *dividendo*, ſi terminorum primi, & ſecundi differentia ad ſecundum referatur, ut differentia tertii, & quarti refertur ad quartum. In his autem omnibus argumentandi modis proportionem manere patet, cum productum extremorum æquale ſemper inveniatur producto mediorum. Ex eadem productorum æqualitate facile colligitur, rationum compoſitione proportionem non mutari. Ratio *compoſita* ex pluribus geometricis rationibus illa dicitur, quam habet productum ex earum antecedentibus ad quadratum ex conſequentibus. Sint duæ proportiones $a : b = c : d$, $f : g = m : s$ erit $af : bg = cm : ds$. Etenim productum extremorum $afds$ æquale eſt producto mediorum $bgcm$. Et quidem $a : b = c : d$, ac proinde $ad = bc$. Præterea $f : g = m : s$, ideoque $fs = gm$, ergo $ad \times fs = bc \times gm$. Simili ratione patet $\frac{ad}{fs} = \frac{bc}{gm}$. Atque eadem valet demonſtratio pro alio quolibet proportionum numero. Ratio ex duabus æqualibus compoſita dicitur *duplicata*, ex tribus *triplicata* &c. Hinc ratio geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius, eſt duplicata ejus, quam habent ipſæ quantitates ad invicem; ratio cuborum triplicata &c. Et contra ratio, quam habent inter ſe radices quadratæ, cubicæ &c. dicitur *ſubduplicata*, *ſubtriplicata* &c. rationis potentiarum *reſpectivarum*. At ratio, quæ intercedit inter radi-

ces

ces quadratas cuborum, hoc est ratio $a^{\frac{3}{2}}$ & $b^{\frac{3}{2}}$ dicitur *sesquiplicata*.

Si duæ quantitates ita inter se connexæ sint, ut si una sit dupla, tripla &c. altera etiam dupla, tripla &c. evadat, prima dicitur esse in *ratione directa simplici* alterius. At si prima in eadem ratione decrescit, in qua altera augetur, tunc illa esse dicitur in *ratione inversa* sive *reciproca* istius. At si duæ quantitates ita sint invicem connexæ, ut altera crescat in eadem ratione, qua primæ quadratum, aut cubus &c. tunc illa ad hanc esse dicetur in ratione duplicata, triplicata &c. At si in eadem ratione una decrescit, qua crescunt alterius quadrata, vel cubi, dicetur esse in ratione hujus *reciproca* duplicata, aut triplicata &c. Harum rationum frequentissimus usus recurret in Physicia.

VI. Ex mediorum, & extremorum producto pendet etiam universa progressionum geometricarum doctrina. In progressione qualibet geometrica productum ex primo in ultimum terminum semper æquale est producto ex secundo, & penultimo, aut etiam alteri cuilibet producto ex duobus terminis a primo, & ultimo æqualiter distantibus. Sit progressio a, ar, ar^2, ar^3, in qua communis multiplicator, aut divisor *ratio communis* dici solet, sitque y ultimus terminus; erunt quatuor ultimi termini y, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{y}{r^3}$, ut patet ex natura progressionis geometricæ. Est autem $a \times y = ar \times \frac{y}{r} = ar^2 \times \frac{y}{r^2}$ $\frac{ar^3 \times y}{r^3}$ &c. Præterea sum-

summa progressionis geometricæ, dempto primo termino, æqualis est summæ omnium terminorum, dempto ultimo per communem rationem multiplicato. Nam $ar + ar^2 + ar^3 + \&c. + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r} + y = r \times \overline{a + ar + ar^2 \&c. + \frac{y}{r^4} + \frac{y}{r^3} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r}}$. Quare si progressionis summa dicatur s; erit $s - a = \overline{s - y} \times r$, hoc est $s - a = sr - yr$, vel $sr - s = yr - a$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1}$. Quamvis autem ex arithmeticarum operationum natura facile pateat, qua ratione ad hunc ultimum valorem perveniatur, res tamen magis fiet manifesta ex appendice, quam de æquationibus mox adjungemus. Porro cum exponens ipsius r ab ipso secundo termino perpetuo crescat, si numerus terminorum dicatur n, erit $n - 1$ exponens ipsius r in ultimo termino; ac proinde $y = ar^{n-1}$, & $yr = ar^{n-1+1} = ar^n$, & $s = \frac{yr - a}{r - 1} = \frac{ar^n - a}{r - 1}$. Quare datis in progressione geometrica primo termino, terminorum numero, & communi ratione, facile invenietur omnium terminorum summa. Si invenienda sit summa seriei decrescentis $y + \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} + \frac{y}{r^3}$ &c. $+ ar^3 + ar^2 + ar + a$, posito terminorum numero infinito, ultimus terminus

a fit $= q$. Cum enim n fit infinitus, ac proinde & infinitus r^{n-1}; erit $a = \frac{y}{r^{n-1}}$ $= o$. Quare summa talis feriei eft $s = \frac{yr}{r-1}$, quæ eft fumma finita, quamvis numerus terminorum fit infinitus; ita feries infinita eft $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c. = 2$.

Schol. Ad progreffiones arithmeticas & geometricas refertur logarithmorum doctrina, maximæ quidem utilitatis in Phyfica fubliomiori, fed rem breviter attingere nobis erit. Progreffio quælibet geometrica hac formula poteft repræfentari $\div\!\div aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5$. &c. in qua a, & q exprimunt numeros quoslibet. Quare fi fiat $a = 1$, præcedens feries abit in hanc $\div\!\div q^0 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5$. &c. Inde autem duo colliguntur; 1°. Productum ex duobus quibufcumque hujus progreffionis terminis pro exponente habet ipforum exponentium fummam. Ita productum ex $q^3 \times q^4 = q^7$. Quare fi inveniendus proponatur in hac progreffione terminus, qui fit duorum aliorum producto æqualis, quæratur terminus, cujus exponens eft ipfa duorum exponentium fumma... 2°. Quotus ex duobus terminis emergens ipfe eft terminus, cujus exponens eft ipfa exponentium differentia. Ita fi dividatur q^8. per q^3, quotus eft q^{8-3} Quare fi inveniendus proponatur terminus duorum alio rum quoto æqualis, quæratur terminus, cujus exponens æqualis eft exponentium differentiæ.

Numeri alicujus *Logarithmus* appellatur expo-

ponens poteſtatis numeri denarii, qui ſit numero dato æqualis. Ita ſi habeatur progreſſio geometrica ∺ 10^0. 10^1. 10^2. 10^3. 10^4. &c. & infra ſcribantur eorumdem terminorum valores ∺ 1. 10. 100. 1000. 10000 &c. exponens 0 eſt logarithmus unitatis, exponens 1 eſt logarithmus numeri 10, & ita deinceps. Sed quia exponentes illi exhibent dumtaxat logarithmos numerorum integrorum in progreſſione decupla 1, 10, 100, 1000 &c. neceſſum eſt præterea haberi logarithmos numerorum intermediorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 &c. quare exponentibus præcedentibus additæ fuerunt decimales ſeptem hoc modo. ∺ $10^{0,0000000}$. $10^{1,0000000}$. $10^{2,0000000}$ $10^{3,0000000}$. &c. Jam vero quia exponentes illi ſemper ſunt in progreſſione arithmetica, ex dictis evidens eſt, valores numeri denarii ad illas poteſtates evecti, quarum indices ſunt iidem exponentes, perpetuo manere in progreſſione geometrica, atque eoſdem exponentes eſſe horum numerorum logarithmos. Quare ſi continuo augeantur decimales illæ fractione $\frac{1}{10000000}$ vel, quod idem eſt, ſi inter ſingulos primæ progreſſionis exponentes inſerantur termini medii arithmetice proportionales *9999999*, habetur nova progreſſio geometrica hoc modo ∺ $10^{0.0000000}$. $10^{0.0000001}$. $10^{0.0000002}$. $10^{0.0000003}$. &c. in qua quidem progreſſione obſervandum eſt, numeros lentiſſime creſcere, cum p.us terminus ſit 1, & 1000000, 2us ſit 10. Erit ergo terminus aliquis intermedius = 2, vel 3, vel 4 &c. Ita 2 inventus eſt = termino $10^{0.3010300}$; 3 =

$10^{0.4771213}$; $4 = 10^{0.6020600}$. Quare exponentes illi ſunt logarithmi numerorum 2, 3, 4 &c. Ex his principiis pendent vulgarium logarithmorum tabulæ ab 1 uſque ad 100000; hæ autem majoribus numeris inveniendis inſerviunt. Aliquæ accuratiores tabulæ logarithmos exhibent ex decem, imo & quindecim decimalibus conſtantes; ſed ut plurimum ſeptem ſufficiunt, atque etiam quinque primæ decimales dumtaxat aliquando adhiberi ſolent. Ex hactenus demonſtratis, & ex logarithmorum tabulis evidens eſt, logarithmos numerorum inter 1, & 10 incipere a 0; logarithmos numerorum inter 10, & 100 incipere ab 1, logarithmos numerorum inter 100, & 1000 incipere a 2; & ita deinceps. Primus ille terminus, qui eſt integer numerus exponentis, dici ſolet logarithmi *characteriſtica*, quo nomine appellatus fuit, quia indicat, quot notas contineat numerus dato logarithmo reſpondens. Manifeſtum enim eſt, numerum illum tot notas continere, quot unitates habet characteriſtica unitate auctas. Ita logarithmo 4, 8145605 reſpondet numerus quinque conſtans notis cum characteriſtica ſit 4.

Commodiſſimæ ſane ſunt logarithmorum tabulæ. Etenim cum demonſtratum ſit, productum ex duobus numeris logarithmorum ſummæ reſpondere, eorum vero differentiæ reſpondere numerorum quotum, per ſolam additionem, & ſubtractionem compendioſe abſolvi poſſunt multiplicatio, & diviſio. Sumantur datorum numerorum logarithmi, ſimulque addantur, numerus ſummæ reſpondens in logarithmorum tabulis erit producti logarithmus; contra autem logarithmorum

dif-

differentia erit logarithmus quoti, ac proinde inveniuntur numeri quæſiti. Simili ratione patet, numerum quemlibet ad datam poteſtatem evehi, ſi toties ſumatur numeri dati logarithmus, quoties per ſeipſum numerus multiplicandus proponitur: hoc eſt, logarithmus per exponentem poteſtatis multiplicari debet, & productum erit quæſiti numeri logarithmus. Contra autem ſi numeri dati logarithmus per exponentem radicis dividatur, quotus erit quæſitæ radicis logarithmus. Quamvis autem eam dumtaxat explicaverim logarithmorum formam, in qua logarithmus unitatis conſtituitur o; multipliciter tamen variari poſſunt logarithmi. Etenim ſi duæ ſint progreſſiones, quarum altera geometrica ſit, altera arithmetica, & ſub ſingulis primæ terminis ſinguli ſecundæ ſcribantur, undecumque initium fiat, hi dicuntur illorum logarithmi. Sic termini progreſſionis inferioris ſunt logarithmi ſuperioris.

$\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot$ &c.

$-4 \cdot -2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14$ &c.

Semel autem conſtituta progreſſione geometrica cum ſuis logarithmis, utramque ſeriem licebit interjectis quotcunque terminis augere; ſi inter duos quoslibet progreſſionis geometricæ terminos medium geometrice proportionale, & inter duos eorum logarithmos medium arithmetice proportionale conſtituas. Sic inter 2, & 4 medium proportionale eſt $\sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2.289$ &c., cujus logarithmus eſt $\frac{6+8}{2} = 7$. Et eadem methodo ſemper inveniri poterunt infiniti alii logarithmi numerorum, qui vel integri ſint,

vel ex integris, & fractis compositi, medios terminos inter duos proximos semper inquirendo. Aliud exemplum in vulgaribus logarithmorum tabulis proponemus. Ut habeatur Log. 9. quæsitus est medius proportionalis inter 1, & 10, sive inter 1. 0000000, & 10. 0000000, extrahendo ex 10. 0 &c. radicem quadratam veræ proximam 3. 1622777, cujus logarithmus est dimidius Log. 10. Et iste quidem numerus major est aliquanto, quam 3, sed longe distat a 9. Itaque inter eum, & 10. 0 &c. iterum quæsitus est medius proportionalis extrahendo radicem numeri, qui oritur ducendo 10. 00 &c. in 3. 16 &c. & inventa est radix veræ quam proxima 5. 6234132. Hic numerus paulo major est, quam 5, & ejus logarithmus habetur, si summa logarithmorum 10. 00 &c. & 3. 16 &c. bifariam dividatur. Sic continua investigatione mediorum proportionalium inter duos numeros, qui sint proxime majores, vel minores, quam 9, devenitur tandem ad numerum, qui ne una quidem millionesima differat a 9, ejusque logarithmus numero 9 attribuitur. Hoc artificio, & patientissimo multorum annorum labore supputatæ sunt logarithmorum tabulæ. Cæterum in tabulis supputandis necesse non est, eam, quam demonstravimus, methodum adhibere, nisi in numeris, qui dicuntur *primi*. Nam in numeri, qui ex aliorum multiplicatione producuntur, satis est logarithmos coefficientium addere, ut habeatur logarithmus producti. Sic Log. 15 = L. 3 + L. 5, & Log. 27 = Log. 3 + Log. 9.

AP-

APPENDIX.

De Æquationibus.

I. Æ*Quatio* dicitur propoſitio duarum quantitatum æqualitatem affirmans, interpoſito æqualitatis ſigno $=$. Æquatio valorem quantitatis alicujus repræſentat, ſi ex una æquationis parte habeatur quantitas ſola quæſita, in parte autem altera occurrant quantitates, quæ omnes ſint cognitæ. Ita ſi habeatur $x = \frac{4 \times 6}{3} = 8$, notus eſt valor ipſius x. Itaque in omni reſolvenda æquatione id curandum eſt, ut nempe quantitas, cujus valor quæritur, in una æquationis parte ſola contineatur, pars autem altera ſolas quantitates cognitas contineat. In hac autem appendice duplex dumtaxat æquationum genus conſiderabimus, eas ſcilicet, in quibus quantitas incognita vel unius eſt dimenſionis, ſeu primi gradus, vel ad ſecundam dimenſionem, ſeu ſecundum gradum evehitur. Quod primi gradus æquationes ſpectat, totum artificium regulis quibuſdam explicabimus, variiſque numeris diſtinguemus.... 1°. Ex una æquationis parte in alteram transfertur quantitas aliqua, facta ſignorum permutatione, ut in hoc exemplo: $5x + 50 = 4x + 56$; $5x - 4x = 56 - 50$, & $x = 6$.. 2°. Si quantitas incognita quantitatibus aliis per multiplicationem, aut diviſionem permixta ſit, ab iis liberari debet in primo caſu per diviſionem, in caſu altero per multiplicationem. Sit $3x + 12 = 27$, erit $3x = 27 - 12$

$- 12 = 15$, & $x = \frac{15}{3} = 5$. Sit autem $\frac{x}{5} + 4 = 10$; erit $x + 20 = 50$, & $x = 50 - 20 = 30$.... 3°. Proportio quælibet geometrica converti potest in æquationem, facta extremorum, & mediorum multiplicatione. Sit $12 - x : \frac{x}{2} = 4 : 1$, erit $12 - x = 2x$; quare $3x = 12$, & $x = 4$. Simili ratione proportio arithmetica in æquationem per additionem mutari potest . . . . 4°. Loco quantitatis cujuslibet in æquatione alia ejusdem valoris substitui potest. Sit $3x + y = 24$, & $y = 9$, erit $3x + 9 = 24$, $x = \frac{24 - 9}{3} = 5$.... 5°. Si pars æquationis quantitatem quæsitam continens signo aliquo radicali afficiatur, delendum est signum radicale, & altera pars æquationis ad eam evehi debet potestatem, quam indicat ipsum signum radicale. Sit $\sqrt{ax + b} - c = d$, erit $\sqrt{ax + b^2} = c + d$, & $ax + b^2 = d^2 + 2cd + c^2$; quare $x = \frac{d^2 + 2cd + c^2 b^2}{a}$

II. His præmissis permutationum regulis, quæ ex antea demonstratis facile intelliguntur, jam problema aliquod unius dimensionis solvendum ponemus. Et primo quidem quæstionis propositæ distincta habeatur notio, & singulæ conditiones attente considerentur. Si alicujus problematis conditiones ita expriman-

mantur, ut tot habeantur incognitæ, quot æquationes, poterit ſemper deveniri ad unicam æquationem, quæ unicam incognitam habeat. Nam ſint E. G. 10 æquationes, & totidem incognitæ; poterit conferendo primam cum ſecunda eliminari per regulas præſcriptas una ex iis incognitis, inveniendo novam æquationem, quæ illa careat, tum idem præſtari poterit conferendo primam cum tertia, & ita porro, ac habebuntur jam novem æquationes cum novem incognitis, quæ eodem artificio ad octo reduci poterunt cum octo incognitis; & ita porro, donec perveniatur ad unicam æquationem cum unica incognita. Hinc ſi habeantur tot æquationes, quot incognitæ, problema dicitur *determinatum*, & unicam, vel finitas numero ſolutiones admittit. Si fuerint plures incognitæ, quam æquationes, problema dicitur *indeterminatum*, & ſolutione habet infinitas. Æquatio $3x + \frac{1}{4}x = 20$ eſt æquatio determinata; ſed $x + y = 12$ eſt indeterminata; etenim ſi ponatur $x = 1$, & $y = 11$; vel $x = 2$, & $y = 10$, & ita porro, ſemper invenietur $x + y = 12$, ita ut infiniti ſint valores, qui pro x & y poſiti numerum datum reſtituant. Regulas hactenus explicatas ad facile exemplum transferamus. Mercator quidam nummos quotannis triente adauget, demptis 100 nummis, quos annuatim impendit in ſumptus, & poſt tres annos fit duplo ditior, quæruntur nummi. In hoc problemate plures latent conditiones ſic evolvendæ, & enuntiandæ. Quantitates incognitæ ultimis alphabeti litteris deſignari ſolent. Itaque mercator habet certam nummorum ſummam.

Anno primo	x
expendit nummos 100. Ergo.	$x - 100$
Reliquum adauget triente, quare	$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
Anno secundo expendit nummos 100. Ergo.	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
Reliquum adauget triente. Quare	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$
anno tertio expendit 100. Ergo	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
Reliquum adauget triente. Quare	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$
Tandem fit duplo ditior. Ergo	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x$,

Quæstio itaque ad æquationem reducitur, ex qua erui debent x. Utramque æquationis partem multiplica per 27, productum fit $64x - 14800 = 54x$; auferas $54x$, residuum est $10x - 14800 = 0$, seu $10x = 14800$; dividas per 10, habetur $x = 1480$. Quare habentur nummi sub initio, & ipsum lucrum.

III. Si in aliquo solvendo problemate perveniatur ad æquationem, quæ ipsum quantitatis incognitæ quadratum, & præterea productum ex ipsa quantitate incognita in aliquam datam quantitatem involvat, hæc æquatio dicitur *secundi gradus*, vel *quadratica*. In talibus autem æquationibus hac regula utendum est. Singulos æquationis terminos,

nos, quæ incognitam quantitatem continent, ad unam partem transferas, ita ut singuli termini cogniti ex parte altera maneant. Si quantitatis incognitæ quadratum coefficiente aliquo afficiatur, per hunc coefficientem singuli æquationis termini dividantur. Tandem dimidii coefficientis quantitati incognitæ præfixi sumatur quadratum, quod ex utraque parte addatur. Jam pars æquationis, quæ incognitam quantitatem continet, ad perfectum quadratum reducta habebitur; ex qua proinde radix quadrata extrahi poterit, & deinde per regulas præscriptas, quantitatis incognitæ valor eruetur. Ponamus $y^2 + ay = b$: addatur hinc, & inde quadratum dimidii coefficientis a, erit $y^2 + ay + \frac{1}{4} a^2 = b + \frac{1}{4} a^2$; extractaque radice fiet $y + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4} a^2}$, & tandem $y = \pm \sqrt{b + \frac{1}{4} a^2} - \frac{a}{2}$. Diligenter observandum est, radici quadratæ præfixum fuisse signum $\pm$ hoc est, $+$, vel $-$. Etenim radix quadrata cujuslibet quantitatis, ut a^2, potest esse $+a$, vel $-a$, ideoque $y + \frac{a}{2} = + \sqrt{b + \frac{1}{4} a^2}$, vel $- \sqrt{b + \frac{1}{4} a^2}$; cum $- \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \times - \sqrt{b + \frac{a}{4}}$ restituat quadratum $b + \frac{a^2}{4}$, non secus ac facit $+ \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \times + \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$. Quare æquationes quadraticæ duas admittunt solutiones. Sic in præsenti exemplo duo sunt valores radicis y, unus

nempe $y = + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; alter autem $y = - \sqrt{+ \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2}}$. At quoniam positiva sunt omnium quantitatum quadrata, hinc patet, quantitatis negativæ radicem esse impossibilem, seu assignari non posse, quæ ideo dicitur *imaginaria*. Aliquando contingit, æquationes nullam solutionem admittere. Exemplo sit $y^2 - ay - 3a^2 = 0$; erit $y^2 - ay = - 3a^2$ & $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = - 3a^2 + \frac{a^2}{4} = - \frac{11a^2}{4}$; extractaque radice habebitur $y - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{- \frac{11a^2}{4}}$, & $y = \frac{a}{2} \pm \sqrt{- \frac{11a^2}{4}}$. Ex quibus manifestum est, duos valores radicis y esse imaginarios, cum assignari non possit radix quantitatis $- \frac{11a^2}{4}$. Si ergo in solutione problematum deveniatur ad quantitates imaginarias, signum est admodum manifestum, vel problema esse impossibile, vel adhibitam esse methodum, quæ aliquid impossibie involvit, prorsus ut fit in argumentatione, dum res ad absurdum reducitur.

IV. Radices imaginariæ, quæ eamdem sub signo radicali quantitatem habent, ut $\sqrt{- a}$, $\sqrt{- a}$ per multiplicationem efficere possunt productum reale, in quo nullum supersit signum radicale, dummodo radices illæ numero pari semper multiplicentur. Etenim evanescere non potest signum radicale, nisi terminus hoc signo affectus multiplicetur per alium terminum, qui idem signum radicale habeat, &. eamdem quantitatem signo inclusam. Jam vero ita sublato signo radicali, si productum ex prima multiplicatione per idem

ſignum radicale multiplicetur, novum productum afficietur quoque ſigno radicali; at ſi rurſus multiplicetur per idem ſignum radicale, iterum evaneſcet ſignum radicale, & ita deinceps. Si prolynomii terminus aliquis contineat radicem imaginariam, quale eſt polynomium $x-a-\sqrt{-b}$, evaneſcere non poteſt ſignum radicale, niſi polynomium datum multiplicetur per aliud, quod a primo differat tantum quoad ſignum vinculo radicali præfixum. Ita in polynomio propoſito ſolum productum ex $x-a-\sqrt{-b}$ in $x-a+\sqrt{-b}$ delere poteſt ſignum radicale, factaque multiplicatione habetur $xx-2ax+aa+b$; in hoc enim ſolo caſu producta ſingula ex unoquoque termino reali in $\sqrt{-b}$ ſeſe mutuo ſignis contrariis elidunt; atque hinc patet, terminum b, qui continet productum ex duobus radicalibus $+\sqrt{-b}\times-\sqrt{-b}$, eſſe neceſſario poſitivum. Itaque quantitatum imaginariarum frequens uſus occurrere poteſt; ipſa enim impoſſibilitas non ſolum per multiplicationem aliquando tollitur, ſed etiam ſumma binarum quantitatum, quæ ex realibus, & imaginariis ſunt mixtæ, realis eſſe poteſt; ita quantitatum $3+\sqrt{-1}$, & $8-\sqrt{-1}$ ſumma eſt realis, nimirum 11, atque etiam realis eſt differentia, nempe 5.

V. Æquationes omnes ſecundi gradus repræſentari ſolent hac formula $x^2-px=q$, in qua p, & q deſignant quantitates quaslibet vel poſitivas, vel negativas. Inde autem ſtatim concluditur $x-\frac{p}{2}=+\sqrt{\overline{pp}+q}$.

Hinc autem difficultates aliquæ ſuboriri poſſent ex præcedentibus facile explicandæ.

Quæ-

Quæri etenim poteſt, cur quantitas poſitiva $x - \frac{p}{2}$ æqualis fiat negativæ $-\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Requidem vera duo quadrata æqualia præbent æquales radices, ſed radices illæ ejuſdem ſigni eſſe debent. Etenim ex eo, quod $4 = 4$, concludi non poteſt $2 = -2$. Præterea $\frac{p}{2} - x$ tam eſt radix ipſius $xx - px + \frac{pp}{4}$, quam $x - \frac{p}{2}$. Quare ſcribendum videretur $+ x \pm \frac{p}{2} = \mp \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Has difficultates facile ſolvemus, ſi obſervetur, hanc ultimam æquationem in quatuor ſequentes reſolvi poſſe, $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $x - \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{q} - x = -\sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Duę ultimę ęquationes conveniunt omnino cum duabus primis; quare ſatis eſt duplex ſignum $\pm$ in una æquationis generalis parte adhibere, ut fieri ſolet. Præterea æquationis reſolutio hoc modo inſtitui poſſet.

Radix quadrata æquationis $xx - px + \frac{pp}{4}$ eſt $x - \frac{p}{2}$, ſi x ſit major quam $\frac{p}{2}$; ſitque $\frac{p}{2} - x$, ſi x ſit minor, quam $\frac{p}{2}$. In 1°. caſu habetur $x - \frac{p}{q} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$; in altero autem erit

erit $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hi ergo sunt duo casus distincte expressi, qui duplici signo in formula generali *implicite*, & obscure enuntiantur hoc modo $x - \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Si haberetur $xx + px = q$, per ratiocinationem præcedentem invenitur $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$, sola nempe radix positiva; tum vero inutilis est radix negativa, cum problematis solutionem non præbeat. Hæc tamen radix haberetur quoque, mutata æquatione per regulas explicatas: prodiret nempe $xx - px = q^2$, & $\frac{p}{2} - x$, vel $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{pp}{4} + q}$. Hac igitur methodo radices positivas necessarias a superfluis, veras a falsis separare liceret.

Æquationum quadraticarum doctrinam facili exemplo illustrabimus. Itaque hoc sit problema, invenire scilicet in linea duo quæcumque luminaria conjungente punctum tale, ut luminaria illa ex hoc puncto æquali luce fulgeant. Distantia inter duo luminaria dicatur a, sitque illuminationis ratio, ut m ad n; præterea dicatur x distantia minoris luminaris a puncto quæsito; erit distantia luminaris alterius ab eodem puncto $a - x$. Jam ponatur, luminarium effectus, seu lucis intensitatem esse in ratione reciproca duplicata di-

stan-

ſtantiarum a puncto lucido, ut vulgo ſtatuitur a Phyſicis; ſumptis diſtantiarum quadratis, erunt intenſitates lucis, ut $\frac{1}{xx}$ & $\frac{1}{xx-2ax+aa}$. Res ita ſe haberet, ſi æqualia forent luminaria; at quia (ex hypoth.) lucis quantitates abſolutæ ſunt, ut m ad n; erunt luminarium effectus, ut $\frac{m}{xx}$ ad $\frac{n}{xx-2ax+aa}$. Itaque ut habeatur punctum quæſitum, inſtituenda eſt æquatio inter $\frac{m}{xx}$ & $\frac{n}{xx-2ax+aa}$, ex qua per reductionum regulas eruitur $xx + \frac{2amx}{n-m} = \frac{aam}{n-m}$, & addito, ut moris eſt, dimidii coefficientis quadrato, habetur $x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{n-m^2} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{n-m}$. Hujus æquationis radices duæ ſequenti formula exprimuntur, ut patet, nempe $x = -\frac{am}{n-m} \pm a\sqrt{\frac{mn}{n-m}}$, vel $x = \frac{a}{n-m} x(-m \pm \sqrt{mn})$.

Ex his evidens eſt, unius radicis valorem eſſe negativum, alterius autem poſitivum. Etenim ſi quantitas radicalis ſigno − afficiatur, jam quantitas tota fit negativa; ſi autem afficiatur ſigno poſitivo +, jam quantitas $-m + \sqrt{mn}$ erit poſitiva, cum ſit

(ex

(ex hypoth.) n major, quam m; ideoque $\sqrt{mn}$ major quam m.

Supereſt ut radicis negativæ uſum explicemus. In memoriam revocanda ſunt, quæ de quantitatibus negativis jam dicta ſunt, ſcilicet quantitates negativas ſecundum directionem poſitivis oppoſitam ſumendas eſſe. In præſenti problemate quantitatis x valor negativus facile intelligetur, ſi obſervabimus, punctum quæſitum a nobis conſiderari tanquam inter duo luminaria conſtitutum. At ſi attendatur ad alterius caſus poſſibilitatem, ponendo nempe punctum quæſitum in linea producta ultra luminaria, jam valor radicis prodit poſitivus. Et quidem ſi diſtantia puncti a minori luminari dicatur x, ut ante, erit luminaris majoris diſtantia $a + x$, quadrata autem diſtantiarum erunt xx, & $aa + 2ax + xx$; quæ per conditiones problematis in æquationem reducta præbent $maa + 2amx + mxx = nxx$; reſoluta æquatione habetur $x = \frac{a \times m \pm \sqrt{mn}}{n - m}$, valor $\frac{a \times m + \sqrt{mn}}{n - m}$ erit poſitivus, hicque ſolus problemati ſatisfaciet in caſu propoſito. Alter autem valor negativus $\frac{a \times m - \sqrt{mn}}{n - m}$ ſignificat, ſumendam eſſe directionem oppoſitam, punctumque non in linea producta ultra luminaria, ſed in ipſa linea jungente conſtituendum eſſe. Problema ad caſum particularem transferamus. Ponatur $n = 4m$: præ-

ce-

cedens formula $x = \frac{a}{n-m} \times \overline{-m \pm \sqrt{mn}}$ in hanc abit $x = \frac{a}{3} \times \overline{\pm 2 - 1}$. Quare duplex valor radicis x erit $+\frac{1}{3}a$ & $-a$, qui quidem duo valores determinant puncta duo, quæ problemati æque satisfaciunt. Punctum unum locatur inter duo luminaria, illiusque distantia a lumine vividiori duplo major erit, quam a debiliori. Punctum alterum constituetur in linea producta, illiusque a lumine debiliori distantia æqualis erit ipsi luminarium distantiæ. Facile autem sine ullo Algebræ auxilio intelligitur, utrumque punctum problemati satisfacere; cum duo illa puncta lumini debiliori duplo proximiora sint, quam vividiori, quæ vim habent quadruplo majorem. Hoc exemplo illustrantur, quæ de quantitatibus negativis breviter antea attigimus. Hæc sunt Arithmeticæ, & Algebræ elementa brevissima quidem, sed tamen rerum varietate copiosa, quantum ad nostras Institutiones Physicas satis esse judicavimus.

F I N I S.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ

PROOEMIUM.

De definitione & divisione Geometriæ.

I. Geometria est scientia magnitudinum, *solidorum* nempe, *superficierum*, & *linearum*. Solidum est magnitudo in longum, latum, & profundum extensa. Quamvis autem nihil sit in rerum natura continuum, quod tres illas dimensiones simul non habeat; illæ tamen seorsim considerari possunt, vel etiam duas tantum concipere possumus, de tertia minime cogitantes; atque hinc intelligitur notio superficiei, & lineæ. Superficies est magnitudo tantum in longum, & latum extensa. Linea autem est magnitudo extensa tantum in longum. Et quidem ipsa itineris longitudinem nobis repræsentamus, non attenta ejus latitudine, & planitiei latitudinem intelligimus, terrarum profunditatem nequaquam considerantes. Denique si concipiamus lineæ terminum, cujus nulla pars sit, nulla extensio, jam terminus ille *punctum* dicitur. Itaque ad explicandam Tyronibus Geometriæ definitionem id primum ostendi debet, quomodo per varios abstractionis gradus ex corporis *physici*, & prout est in se, consideratione ad corporis *geometrici*, & simpliciter extensi contemplationem perveniamus, ac deinde ad superficiei, & lineæ notionem progrediamur, atque tandem notionem puncti formemus.

Ne-

Neque methodo ſatis philoſophica utuntur, qui ſtatim ſuperficiem definiunt terminum ſolidi, lineam terminum ſuperficiei, & punctum terminum lineæ. Ex præcedenti definitione naſcitur diviſio Geometriæ in Geometriam linearum, ſuperficierum, & ſolidorum. Quare tres erunt Geometriæ ſectiones. 1.ª De lineis, 2.ª De ſuperficiebus. 3.ª De ſolidis. In prima ſectione linearum poſitionem, illarnmque mutuam relationem expendemus. Porro linearum nomine non ſolum intelligimus lineam rectam, ſed etiam lineam circularem, cujus utilitas eſt maxima in conſideranda linearum rectarum mutua poſitione. Quare ad Geometriæ Elementa pertinent quoque circuli proprietates. In ſecunda autem ſectione ſuperficierum proprietates, & menſuram conſiderabimus. In tertia tandem ſectione proprietates ſolidorum, illorumque menſuram demonſtrabimus. At recta methodus poſtulat, ut rerum demonſtrandarum varietatem in unaquaque ſectione variis Capitibus diſtinguamus.

II. Lineam repræſentare ſolent Geometræ tanquam genitam motu puncti. Si punctum directionem non mutat, linea hoc motu deſcripta *recta* dicitur; *curva* autem appellatur, ſi punctum perpetuo mutet directionem. At fatendum eſt, ita ſimplicem eſſe lineæ rectæ, & curvæ notionem, ut ad clariorem ideam, magiſque *elementarem* reduci vix poſſit. Rectam definiunt alii lineam omnium inter duos terminos ductarum breviſſimam. Cæterum inde evidens eſt, datis in linea recta punctis duobus datam eſſe hujus lineæ poſitionem, ita ut unica dumtaxat recta per hæc duo puncta tranſire poſſit.

sit. Ex his etiam intelligitur, quid sit superficies plana, scilicet omnium superficierum eosdem terminos habentium brevissima, vel cui linea recta undequaque adaptari potest. Circulus definitur figura plana, unica curva linea comprehensa, quæ *peripheria* dicitur, sive *circumferentia*, ad quam omnes rectæ lineæ a puncto medio, quod *centrum* dicitur, ductæ æquales sunt inter se; circumferentiæ pars quælibet *arcus* vocatur. Linea recta per centrum ducta, & utrinque terminata *diameter* dicitur; rectæ autem a centro ad circumferentiam ductæ *semidiametri*, vel *radii* appellantur.

III. *Anguli* notio ope circuli facillime concipitur. Duæ lineæ rectæ in aliquo puncto concurrentes angulum efficere dicuntur. Angulorum mensura est arcus, quem ipsorum latera comprehendunt in peripheria circuli ex anguli vertice, tanquam centro, descripti. Porro dum dicitur, anguli mensuram esse arcum circuli, nihil aliud significatur, nisi æquales esse angulos, si æquales sint arcus ex angulorum vertice, & eodem radio descripti. Ita dum dicitur, angulum esse alterius duplum, nihil aliud intelligitur, nisi arcum unum altero esse duplo majorem. Itaque anguli natura in majori, aut minori inclinatione unius lineæ ad aliam consistit. Igitur angulus cum sit mera linearum inclinatio, & apertura; extensio vel quantitas proprie loquendo dici non potest; ac proinde, abstractione facta ab omni extensionis consideratione, angulum alterius duplum dicere non possumus, cum id dici possit dumtaxat de quantitate comparata cum alia quantitate homogenea. Quia vero

me-

mera linearum apertura partes non habet, angulus non est quantitas proprie dicta; atque hinc factum est, ut anguli mensura cum circuli arcu comparaverint Geometræ. Circulus dividi solet in partes æquales 360, quæ *gradus* dicuntur; singuli gradus dividuntur in 60 minuta prima, quodlibet minutum primum dividitur in 60 secunda, & sic in infinitum. Gradus per o designari solent, minuta autem per lineolas numeris superimpositas. Ita si forte occurrant 35°, 25′, 36″, 42‴, lege 35 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda, 42 tertia.

IV. Ex angulorum notione pendet linearum mutua positio. Linea dicitur alteri lineæ *perpendicularis*, quando in ipsam incidens facit angulos hinc & inde æquales; angulus hujusmodi dicitur *rectus*. At si recta una super alteram cadens duos angulos efficiat, ita ut unus sit recto major, alter autem minor, primus dicitur *obtusus*, alius autem *acutus*. Si talis sit rectarum positio, ut eamdem semper a se invicem servent distantiam, evidens est, nullam esse linearum illarum mutuam inclinationem, ac proinde in infinitum etiam protractæ non concurrent, seu angulum non efficient: tales lineæ dicuntr *parallelæ*.

V. Ex lineæ rectæ definitione evidens est, duas lineas rectas in unico dumtaxat puncto concurrere posse; cum enim omni careant latitudine, communis intersectio in unico tantum puncto fieri potest. Neque ad aliam deinde intersectionem transire possunt; alterutra enim linea directionem mutaret, ac proinde non forent ambæ rectæ, quod est contra hyp. Id pro axiomate habent Geo-

me-

metræ, & ita exprimi solet: *Duæ rectæ segmentum commune habere, nec spatium claudere possunt*. Itaque tres saltem lineæ requiruntur, ut spatium undique claudatur. Spatium undique clausum *figura* dicitur. *Triangulum* est figura terminata tribus lineis, quæ ejusdem latera vocantur. Hæc autem latera si fuerint æqualia, triangulum dividitur *æquilaterum*; si duo tantum latera sint æqualia, triangulum vocatur *isosceles*; demum si latera omnia fuerint inæqualia, triangulum *scalenum* dicitur. Rursus autem triangulum ratione angulorum considerari potest; si unum habeat angulum rectum, triangulum *rectangulum* dicitur; *acutangulum*, si omnes habeat angulos acutos; & tandem *obtusangulum*, si angulum obtusum habuerit.

VI. Figura quatuor lateribus terminata *quadrilaterum* generatim appellatur. Si autem æqualia sint figuræ latera, & ad angulos rectos juncta, *quadratum* dicitur; at simpliciter rectangulum vocatur, si latera duo opposita reliquis duobus majora sint, manentibus tamen angulis rectis. *Parallelogramum* appellatur figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt mutuo parallela, etiamsi anguli lateribus comprehensi non sint recti. Si figura quarilatera sit æquilatera, non tamen rectangula, *Rhombus* dicitur; & *Rhomboides* vocatur, si latera opposita dumtaxat æqualia habuerint. Tandem quodlibet quadrilaterum ab iis, quæ jam enumeravimus diversum, *Trapezium* appellatur. Sed figura *polygona* dicitur, quæ pluribus, quam quatuor, lateribus terminatur. Si latera fuerint quinque, sex, septem &cs, figura *pentagonum*, *hexagonum*, *heptagonum* &c. dici solet.

let. Figura autem polygona *regularis* est, quæ æquilatera, & æquiangula est.

VII. Axiomata, & postulata plurima præmittere solent Geometræ, quæ quidem nos omittimus. Quæ enim est axiomatum de toto, & parte utilitas, ut intelligamus, dimidiam lineam tota minorem esse? Ecqui statim non videt, rectam lineam produci posse; circulum dato intervallo posse describi, & reliqua hujusmodi? Verum inter axiomata unum de figurarum *superpositione* legitur, simplicissimum quidem, & in universa Geometria utilissimum, quod sine aliqua explicatione prætermittere nolumus. Dicunt nempe, *ea esse æqualia, quæ sibi mutuo superimposita perfecte congruunt*. Principium illud *superpositionis* non ita crasse intelligendum est, quasi in mutua figurarum applicatione consisteret, non secus, artifex mensuram aliquam datæ longitudini applicat, ut inde veram longitudinem concludat; talis demonstrandi ratio minime foret geometrica. In eo positum est prædictum principium, ut figuram alteri impositam imaginemur, & deinde concludamus. 1.° Ex partium datarum æqualitate ipsam earumdem partium convenientiam, sive *coincidentiam*... 2.° Ex hac coincidentia ipsam reliquarum partium coincidentiam, ac proinde & perfectam duarum figurarum æqualitatem, & similitudinem. Itaque *superpositionis* principio intelligenda non est dumtaxat mutua figurarum applicatio, sed partis unius alteri parti impositio, ut deinde figuras illas inter se comparemus. Unde evidens est, idem valere principium ad demonstrandam figurarum inæqualitatem. Cæterum hoc unico prin-

principio cum angulorum mensura per arcus circulares conjuncto, demonstrari possunt propositiones omnes, quæ ad elementarem linearum Geometriam pertinent.

SECTIO I.

De Geometria linearum.

CAPUT I.

De lineis rectis quoad mutuam positionem considerátis, nullo tamen spatio, seu nulla figura terminatis.

PROP. I. RECTA QUÆLIBET IN RECTAM CADENS VEL DUOS ANGULOS EFFICIT RECTOS, VEL DUOBUS RECTIS ÆQUALES. Etenim recta insistat perpendiculariter, ut GE, vel oblique, ut RE (Fig. 1.) In 1. casu patet (ex def.) angulos GEF, GEC esse rectos; in casu altero anguli duo CER, REF simul sumpti æquales sunt duobus angulis CEG, GEF, hoc est duobus rectis.

COR. I. Producta linea RE in O, simili ratione patet, angulos FEO, OEC duobus rectis æquales esse; ac proinde duæ rectæ sese invicem secantes efficiunt angulos quatuor rectis æquales. Jam centro E describatur circulus; mensura angulorum quatuor erit integra circuli circumferentia, hoc est gradus 360. Igitur angulus rectus erit quarta pars circumferentiæ, nempe 90. gradus.

COR. II. Rectæ GH, RO efficiunt angulos GER, HEO, qui dicuntur *ad verti-*

cem oppositi. Illos autem angulos æquales esse, manifestum est; cum sit dimidium peripheriæ RFO æquale dimidio peripheriæ GFH; sublata autem communi parte GO, erunt arcus reliqui GR, HO æquales inter se.

COR. III. Recta GE ad alteram CF perpendicularis est, si puncta duo quælibet G, E a punctis duobus quibuslibet, ut C, F æqualiter distent, hoc est, si GC = GF, & CE = EF. Etenim puncta duo E & G non magis inclinant versus C, quam versus F; ac proinde cum duo puncta lineæ rectæ positionem determinent (ex def.) æqualis est rectæ totius GE hinc & inde ad rectam CF inclinatio; ideoque ob angulos utrinque æquales recta GE perpendicularis est ad CF. Patet autem, puncta C & F sumi posse pro arbitrio inter CE, & EF.

COR. IV. Ex puncto quolibet E in recta CF dato duci potest ad eamdem rectam perpendicularis GE. Etenim centro E, & dato quolibet æquali intervallo Ec, Ef describantur arcus circuli sese invicem secantes in g: recta per g, & E ducta erit perpendicularis quæsita ob distantias gc, gf, & Ec, Ef æquales.

Si punctum h extra rectam CF datum sit, simili ratione ducitur perpendicularis hE. Etenim ex puncto h sumantur æqualia intervalla hc, hf, deinde ex punctis c & f, tanquam centris, & eodem intervallo describantur arcus circuli se mutuo secantes in g, ducaturque hg, hæc erit perpendicularis ob æquales hc, hf, & gc, gf distantias. Evidens autem est, in utroque casu unicam perpendicularem duci posse. Unica enim

enim est recta transiens per punctum E, vel h, quæ cum recta CF æquales hinc & inde efficiat angulos. Patet autem, lineam perpendicularem esse omnium, quæ ex puncto dato ad lineam datam duci possunt, brevissimam; cum recta perpendicularis non magis pendeat ex una parte, quam ex alia: ac proinde neque ad dexteram declinet, neque ad sinistram, ideoque brevissima est via a puncto dato ad lineam datam. Item evidens est, ex puncto dato ad lineam datam unicam perpendicularem duci posse.

Eadem omnino est operatio, si recta cf in duas partes æquales dividenda proponatur. Ex punctis c & f tanquam centris, & eodem radio describantur arcus circuli sese secantes in g; deinde ex iisdem punctis, & sumpto quolibet eodem intervallo describantur arcus se invicem secantes in h, recta hg dividet cf æqualiter in E, ut patet; cum singula puncta rectæ gh æqualiter distent a punctis c & f: ac proinde Ec = Ef.

PROP. II. Si lineæ AB, DC sint parallelæ (Fig. 2.) erit 1.° ANGULUS OFD, QUI EXTERNUS DICITUR, ÆQUALIS ANGULO OGB, QUI INTERNUS, ET OPPOSITUS VOCATUR. 2.° ÆQUALES ERUNT ANGULI BGF, GFC, QUI DICUNTUR ALTERNI, 3.° ANGULI INTERNI, ET AD EAMDEM PARTEM POSITI DFG, FGB ÆQUALES ERUNT DUOBUS RECTIS. Cum lineæ parallelæ eodem inter se ubique distent intervallo (ex def.), evidens est, eamdem fore parallelæ utriusque BA, DC inclinationem ad rectam EO, ac proinde angulus OFD æqualis est angulo OGB: quod erat 1um. Præterea cum angulus GFC æquetur angulo

DFO ad verticem oppoſito (cor. 2. prop. 1.); erunt etiam æquales anguli BGF, GFC: quod erat 2um. Tandem cum anguli OFD, GFD æquentur duobus rectis (prop. 1.); æquales itidem erunt duobus rectis DFG, FGB; quod erat 3um.

Viceverſa ſi angulus OFD æqualis ſit interno, & oppoſito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO; ac proinde rectæ illæ parallelæ ſunt inter ſe. Rurſus ſi æquales ſint anguli alterni BGF, GFC; vel ſi duobus rectis ſimul æquales ſint interni ad eamdem partem poſiti BGF, GFD; angulus externus DFO ſemper æqualis erit angulo interno, & oppoſito BGF; ac proinde rectæ AB, CD erunt parallelæ. Itaque ex ipſa paralleliſmi notione facile colliguntur tres primariæ parallelarum affectiones neceſſario nexu inter ſe conjunctæ, ita ut ex una qualibet inferre liceat, rectas illas eſſe parallelas. Porro in demonſtrandis proprietatibus illis nimis laborare videntur quidam Geometræ.

COR. I. Si duæ rectæ AB, HK parrallelæ ſint eidem rectæ CD, erunt etiam inter ſe parallelæ. Etenim inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO eadem erit, ac inclinatio rectæ CD ad eamdem.

COR. II. Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam rectæ AB; ex quolibet hujus puncto G ducatur recta GFO, & fiat angulus OFD æqualis angulo OGB, deſcriptis nempe ex punctis O, F, tanquam centris, & eodem radio arcubus æqualibus FM, GN; erit recta FD parallela ipſi AB.

CA-

CAPUT II.

De linearum rectarum respectu circuli positione.

PROP. I. Ducta recta FM ad circumferentiam utrinque terminata, quæ chorda dicitur (Fig. 3.); recta EP ex centro circuli ad chordam perpendiculariter ducta eamdem secat in duas partes æquales. Cum enim recta EP e centro ducatur, punctum E æqualiter distat a punctis extremis chordæ F & M, (ex defin.). Præterea cum recta EP sit perpendicularis ad chordam, singula alia puncta æqualem habent ab iisdem extremis distantiam (cor. 3. prop. 1.) Quare punctum P æqualiter etiam distat a punctis F & M.

Et viceversa recta quælibet EP per centrum transiens, & chordam FM æqualiter dividens, eam quoque perpendiculariter secat. Etenim cum recta EP chordam dividat æqualiter, punctum P æqualiter distat ab extremis F & M: quia vero recta EP transit etiam per centrum; punctum E æqualiter distat ab extremis F & M. Quare puncta P & E æqualiter distant a punctis F & M; ac proinde EP perpendicularis est ad FM.

Rursus si recta EP perpendicularis sit ad chordam, eamque æqualiter dividat, recta illa transit per centrum. Cum enim chordam dividat æqualiter; punctum P æqualiter distat ab extremis F & M. Præterea cum sit perpendicularis, singula illius puncta

æqualiter etiam diſtant a punctis F & M. Erit ergo centrum E hujus perpendicularis punctum aliquod.

PROP. II. Si recta EH transiens per centrum dividat æqualiter chordam FM, æqualiter quoque dividet arcum FHM. Etenim cum ſingula puncta rectæ EH æqualiter diſtent a punctis F & M, æqualis erit puncti H ab extremis F & M diſtantia. Quare ſi ſemicirculus GMH ſemicirculo GFH imponatur, congruet punctum M cum puncto F, & ob punctum H commune congruent & chordæ HM, FH, & arcus iiſdem chordis ſubtenſi.

COR. I. In eodem circulo, vel in circulis æqualibus chordæ æquales æqualibus arcubus reſpondent, inæquales autem arcubus inæqualibus. Præterea chordæ æquales æqualiter diſtant a centro, chordæ autem inæquales diſtant inæqualiter; quod evidens eſt ex *ſuperimpoſitionis* principio. Nam chorda æqualis cum æquali chorda ſemper congruet, nec cum chorda inæquali congruere unquam poterit.

COR. II. In eodem ſemicirculo, vel in ſemicirculis æqualibus, quo majores ſunt, vel minores arcus, eo majores, vel minores ſunt chordæ, & centro magis, vel minus proximæ. Viceverſa quo majores ſunt, vel minores chordæ, & centro magis, vel minus proximæ, eo etiam majores ſunt, vel minores arcus ſubtenſi.

COR. III. Ducta chorda FM diametro AB parallela intercipit æquales arcus AF & BM. Etenim, cæteris manentibus ut ante, arcus AH = arcui BH, & Arcus FH = arcui HM: quare demptis arcubus æqualibus

libus remanet AF = BM. Evidens est, eamdem esse demonstrationem, si parallela NQ ad oppositas diametri partes jaceat; erit nempe arcus FN = arcui MQ.

COR. IV. Si ponatur, rectam NQ motu sibi semper parallelo a centro recedere, donec puncta duo N & Q coeant in G; chorda NQ abit in *tangentem*, quæ nempe circulum in unico puncto tangit; evidens autem est, in hoc etiam casu esse GN = GQ.

COR. V. Ex corollariis præcedentibus patet, qua ratione per tria data puncta circulus describi possit, dummodo tamen puncta illa in eadem recta non jaceant. Agantur rectæ duæ, quæ jungant tria puncta data, hæ erunt chordæ circuli quæsiti. Quare ductis perpendicularibus, quæ chordas dividant æqualiter, utraque perpendicularis transit per centrum, quod proinde erit in communi utriusque perpendicularis intersectione. Simili ratione, dato circuli arcu, centrum invenitur, totaque circumferentia describitur.

COR. VI. Hinc arcus circuli datus in duos æquales arcus dividi potest. Ducatur enim chorda arcum datum subtendens, hæcque æqualiter per rectam perpendicularem dividatur; eadem perpendicularis etiam angulum, quem arcus metitur, æqualiter in duas partes dividet.

SCHOL. Ex hoc corollario patet, facile dividi posse angulum quemlibet in partes 2, 4, 8, 16, 32, & ita deinceps, secundum terminos progressionis geometricæ duplæ; sed per Geometriam elementarem angulus in tres partes æquales dividi non pot-

 est:

est: atque hæc est anguli *trisectio* a Geometris per *circinum*, & *regulam*, ut dicunt, hoc est, per lineæ rectæ, & circuli constructionem frustra quæsita. Demonstrant enim Geometræ, problema illud ad tertii gradus æquationem necessario pertinere, quæ quidem æquationes per solum circulum construi non possunt. Neque ob eamdem rationem per sola Geometriæ elementa angulus dividi potest in partes 5, 6, 7, 9 &c. Talis enim divisio pro diverso partium æqualium numero ad altiores æquationum gradus assurgit. Id autem, quamvis ad elementa non pertineat, breviter monuisse volumus.

PROP. III. RADIUS EG IN PUNCTO CONTACTUS G AD TANGENTEM PERPENDICULARIS EST. Etenim quoniam tangens circulum in unico puncto tangit (ex cor. 4. prop. 2. hujus), radius EG minima est tangentis a centro distantia, ac proinde ad tangentem perpendicularis (ex def.)

Viceversa recta RT perpendicularis ad extremitatem radii G circulum tangit in unico puncto G. Etenim cum sit EG minima rectæ RT a centro E distantia, alia quælibet puncta rectæ RT magis distant a centro, quam punctum G; ergo singula puncta præter G extra circumferentiam jacent.

COR. I. Recta circumferentiam tangit in unico puncto, cum ex centro E ad rectam datam unica perpendicularis duci possit, (cor. 4. prop. 1. cap. 1.)

COR. II. Hinc facile ducitur tangens ad punctum datum G. Ducto scilicet radio EG erectaque in G perpendiculari RT.

COR. III. Ad punctum datum in circum-

cumferentia unica tangens duci potest (loc. cit.); ac proinde si per punctum contactus agatur recta quælibet, hæc coincidit cum tangente, vel circumferentiam secat.

COR. IV. Si duo circuli GNA, GOQ eamdem habent tangentem; recta HG eidem perpendicularis per utriusque centrum, puta E & P transibit. Jam vero si ducatur ES, jungaturque PS, quæ producta secabit in O circulum GOQ, & in R tangentem RT: erit semper in triangulo ESP latus PS minus duobus reliquis ES, EP (ex def. lineæ rectæ). Quare cum radii ES, EG æquales sint, erit recta PS minor quam PG, sive PO. Ergo quodlibet punctum S circuli GSF erit intra circulum GOQ; ac propterea illi circuli se mutuo contingent in unico puncto G, in quo scilicet rectam RT tangunt.

SCHOL. Cum inter tangentem, & circulum nulla duci possit linea recta, angulus, quem arcus circuli efficit cum tangente, minor est quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur. Hujus propositionis utilitas est in Physica, ubi agitur de divisibilitate in infinitum. Id vero maximam admirationem, concertationesque maximas excitavit, nempe angulus contactus, quem facit arcus cum tangente, ab infinita circulorum serie in infinitas partes dividitur, licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit. Hujus autem paradoxi geometrici causam inde repetunt nonnulli, quod nempe anguli rectilinei natura diversa omnino sit a natura anguli curvilinei in puncto contactus. Etenim quemadmodum infinitæ lineæ nunquam superficiem efficiunt, nec ulla inter has quanti-

titates ratio potest assignari, licet in partes infinitas dividi possint; ita etiam infiniti anguli contactus quovis rectilineo minores sunt, licet sint divisibiles in infinitum. Verum in hac lite geometrica *Logomachia* aliqua latere videtur. Si anguli nomine intelligatur portio finita spatii curva, & tangente comprehensi, nullum dubium est; quin spatium illud comparari possit cum portione finita spatii rectarum duarum concursu intercepti. At si anguli rectilinei notio vulgaris adhibeatur, evidens est, notionem illam absolute consideratam angulo contactus convenire non posse, cum in hoc angulo latus unum sit curvilineum. Itaque hujus anguli afferri debet propria definitio, atque hac definitione, quæ arbitraria omnino est, semel constituta, & explicata, jam nihil difficultatis superesse potest. Et requidem ipsa de solo nomine hic litigari demonstrat summa Geometrarum consensio circa anguli hujus proprietates. Sed quidquid sit, quicumque geometricarum demonstrationum vim percipiet, pro evidenti habebit, angulum contactus & minorem esse quovis rectilineo, & in infinitos curvilineos dividi posse.

PROP. IV. ANGULUS BAD TANGENTE BA, ET CHORDA AD COMPREHENSUS HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM AFD. Etenim ducta per centrum C diametro EG chordæ AD parallela (Fig. 4), ductaque alia diametro fF eidem chordæ perpendiculari; rectus erit angulus BAC tangente, & radio comprehensus (prop. præc.) itemque rectus est angulus FCG, ac proinde utriusque anguli mensura est arcus FG. Sed angulus BAD = BAC − DAC,

DAC, vel − ACG ob parallelas DA & EG; quare cum ACG pro mensura habeat arcum AG, erit angulus BAD = FAG − AG = FA = $\frac{1}{2}$ AD.

PROP. V. ANGULUS CAD (Fig. 5.) AD CIRCUMFERENTIAM HABET PRO MENSURA DIMIDIUM ARCUM CD LATERIBUS AC & AD INTERCEPTUM. Etenim ex anguli virtice A ducatur tangens EB, summa trium angulorum BAC + CAD + DAE = 180° = $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CD + $\frac{1}{2}$ DA. Sed angulum BAC metitur $\frac{1}{2}$ AC & angulus EAD = $\frac{1}{2}$ AD (ex prop. præc.): ergo angulus CAD = $\frac{1}{2}$ CD.

COR. I. Angulus DFC ad centrum duplus est anguli DAC ad circumferentiam eodem arcu CD subtensi.

COR. II. Angulus rectus in circumferentia circuli semicircumferentiam lateribus suis comprehendit, totaque diametro subtenditur. Angulus acutus arcum semicircumferentia minorem, obtusus autem majorem intercipit, uterque chorda subtenditur.

COR. III. Angulus BAD (Fig. 6, 7.) vel intra, vel extra circulum pro mensura habet $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ CE pro angulo intra circulum, vel $\frac{1}{2}$ BD − $\frac{1}{2}$ bC pro angulo extra. Per E agatur chorda EF (Fig. 6.) rectæ AD parallela; erit angulus BEF = BAD (ob parallelas). Sed mensura anguli BEF est $\frac{1}{2}$ BF, & $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ DF, & DF = CE (cor. 3. prop. 2.). Ergo $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ CE.

COR. IV. Angulus bAD (Fig. 7.) tangente Ab & secante AD interceptus = $\frac{1}{2}$ Db − $\frac{1}{2}$ bC. Si enim circa punctum A revolvi intelligatur recta AB, donec tangens

 eva-

evadat in b, puncta A & B convenient in b. Simili ratione angulus dAb inter duas tangentes Ad & Ab comprehensus pro mensura habet $\frac{1}{2}$ dFb — $\frac{1}{2}$ dCb.

CAPUT III.

De lineis rectis, quæ spatium claudunt, seu de figurarum rectilinearum proprietatibus.

PROP. I. IN TRIANGULO QUOLIBET SUMMA TRIUM ANGULORUM ÆQUALIS EST DUOBUS RECTIS. Etenim per tres angulorum vertices describatur circulus, (cor. 5. prop. 2. cap. 2.); triangulum erit inscriptum circulo, cujus chordæ erunt tria latera; anguli autem habent pro mensura dimidium arcum lateribus oppositis subtensum (prop. 5. cap. 2.). Quare trium angulorum summa æqualis est dimidiæ trium arcuum summæ, hoc est, dimidiæ circumferentiæ seu gradibus 180.

COR. I. In triangulo unicus esse potest angulus rectus, vel obtusus, reliqui duo sunt acuti. Quare in triangulo rectangulo angulus acutus est *complementum* alterius ad rectum.

COR. II. Datis duobus angulis in triangulo, datur & tertius, qui est differentia inter datam duorum angulorum summam, & gradus 180. Si autem unicus datus sit angulus, data est reliquorum duorum summa, quæ est *complementum* ad duos rectos, & *supplementum* simpliciter appellari solet.

COR. III. In triangulo quolibet ABC (Fig. 8.) producto latere CB in I, angulus exter-

externus ABI æqualis est duobus angulis internis oppositis ACB, CAB. Etenim summa anguli externi ABI, & interni contigui ABC æqualis est duobus rectis (prop. 1. cap. 1.): sed summa trium angulorum ACB, CAB, ABC æqualis etiam est duobus rectis: ergo angulus externus ABI æqualis est duobus internis oppositis ACB & CAB: dempto scilicet communi angulo ABC.

PROP. II. IN OMNI TRIANGULO MAJUS LATUS OPPONITUR MAJORI ANGULO, MINUS AUTEM MINORI: ET VICEVERSA ANGULUS MAJOR MAJORI LATERI, ET MINOR MINORI OPPONITUR. Triangulum circulo inscribatur, majorem angulum metitur arcus major, & majorem arcum subtendit major chorda, & contra (cor. 5. prop. 2. cap. 2.)

COR. I. In triangulo æquilatero singuli anguli æquales sunt inter se, & viceversa si tres anguli sunt æquales inter se, triangulum est æquilaterum. Inscripto enim, ut ante, triangulo in circulo, tria lateria æqulia fient tres æquales circuli chordæ, quæ proinde tres arcus æquales subtendent, ideoque & tres anguli æquales sunt. Evidens autem est, unumquemque angulum esse tertiam partem grad. 180, hoc est grad. 60.

COR. II. In triangulo isoscele æquales sunt anguli lateribus æqualibus oppositi; & contra si duo anguli in triangulo æquales sunt, triangulum est isoscele. Patet ut in coroll. præc.

PROP. III. SI IN DUOBUS TRIANGULIS TRIA LATERA ÆQUALIA SINT, TOTA TRIANGULA ERUNT ÆQUALIA. Sit AB = ab, AC = ac, BC = bc (Fig. 9.).

Ex

Ex punctis A & B tanquam centris, describantur arcur FCG, DCE se invicem secantes in C. Triangulum abc ita imponatur triangulo ABC, ut punctum A conveniat cum a, punctum b cadet etiam in B, ob AB = ab, & ob ac = AC recta ac terminabitur in aliquo puncto arcus FCG. Similiter ob bc = BC, recta bc terminabitur in aliquo puncto arcus DCE; quia vero rectæ ac, bc se mutuo jungunt in c; utraque terminabitur in puncto intersectionis C. Ergo ac congruet cum AC; bc cum BC, totumque triangulum abc cum triangulo ABC.

COR. I. Si sit angulus A = a, B = b, C = c, & latus AB = ab; erit triangulum ABC = triangulo abc. Latus ab imponatur lateri AB; ob angulum a = A, & b = B, cadet ac in AC, & bc in BC; quare latera duo ac, bc, & AC, BC in eodem puncto jungentur, hoc est, c cadet in C, totumque triangulum abc congruet cum triangulo ABC. Eodem modo comparari inter se possunt latera duo ac, AC, quæ respondent angulis æqualibus, & dicuntur *homologa*. Quare æqualia sunt triangula duo, si anguli unius æquales sint angulis alterius; & præterea si triangula latus unum homologum æquale habeant.

COR. II. Si duo triangula latera duo habuerint æqualia, & angulos his lateribus interceptos æquales, tota triangula erunt æqualia. Sit AC = ac, AB = ab, & angulus A = a. Imponatur latus AB lateri ab, & latus AC lateri ac; ob angulos A, a æquales, latera illa congruent. Præterea cum sit AC = ac, & AB = ab, punctum

c ca-

e cadet in C, & b in B; ac proinde bc congruet cum BC.

PROP. IV. SI DUO TRIANGULA INÆQUALIA ÆQUALES HABENT ANGULOS, PONATURQUE ANGULUS UNUS SUPRA ALTERUM ÆQUALEM ANGULUM, ITEMQUE SIBI MUTUO IMPONANTUR LATERA HOMOLOGA, QUÆ ÆQULEM IN UTROQUE TRIANGULO ANGULUM COMPREHENDUNT, ERIT TERTIUM LATUS TERTIO LATERI PARALLELUM. Ponatur angulus D (Fig. 10.) supra angulum æqualem B, latus DF supra latus homologum BC, & latus DE supra latus BA itidem homologum; erit latus FE, vel fe parallelum lateri AC. Cum enim angulus feB æqualis sit angulo CAB, erit recta fe rectæ AC parallela (prop. 2. cap. 1.). Si angulus F poneretur supra angulum æqualem C; simili modo demonstratur, rectam DE esse rectæ AB parallelam. Idem dicendum de rectis FD & BC.

Viceversa si per punctum f pro arbitrio sumptum in latere trianguli agatur recta fe parallela rectæ AC, æquales sunt anguli Bfe, BCA, & Bef, BAC (loc. cit.). Triangula illa, quæ angulos habent respective æquales, dicuntur *similia*.

PROP. V. QUODLIBET POLYGONUM RESOLVI POTEST IN TOT TRIANGULA, QUOT SUNT POLYGONI LATERA. Etenim ex puncto C intra polygonum (Fig. 11.) ad singulos angulos duci possunt rectæ; evidens autem est, tot esse triangula, quot polygoni latera.

Alia ratione in triangula dividi possunt polygona (Fig. 12.). Si nempe ex polygoni angulis ducantur tot rectæ, quot duci possunt, quæ tamen se mutuo non secent. Illæ au-

læ autem rectæ, quæ ab angulo polygoni ad alium ducuntur, *diagonales* vocatur; patet, in hoc casu tot esse triangula, quot latera polygoni, demptis duobus.

COR. I. Summa angulorum polygoni æqualis est producto ex 180 gr. in numerum laterum, demptis duobus, hoc est, demptis 360 gr. Etenim anguli polygoni simul sumpti æquales sunt angulis omnibus triangulorum, in quæ reductum est polygonum, demptis angulis, quorum vertex est in C. Horum autem angulorum summa est 360 gr. (prop. 1. cap. 5.). Sed tot sunt triangula, quot latera; quare summa omnium angulorum polygoni æqualis est producto ex 180 gr. in numerum laterum binario mulctatum. Ita si polygonum habuerit septem latera, summa angulorum est $= 180$ gr. $\times \overline{7 - 2} = 900$ gr. Idem quoque evidens est, si polygonum per diagonales in triangula dividatur; erit enim in his triangulis angulorum summa angulis polygoni æqualis; ac proinde summa illa æqualis est producto ex 180 gr. in numerum triangulorum, hoc est, in numerum laterum polygoni, demptis duobus.

COR. II. Polygonum quodlibet regulare circulo inscribi potest. Dividantur in duas partes æquales anguli polygoni (Fig. 11.) per rectas AC, BC, DC, EC, &c. rectæ illæ se mutuo secabunt in C, & erunt inter se æquales. Etenim rectæ AC & BC sibi occurrentes in puncto aliquo C efficiunt triangulum ACB; itemque rectæ BC & DC aliud efformant triangulum BCD. Sed triangula illa sunt æqualia; nam cum anguli polygoni regularis æquales sint & bifariam

æqua-

æqualiter dividantur, æquales ſunt anguli CAB, CBA inter ſe, & angulis CBD, CDB; præterea æqualia ſunt latera AB, BD; ergo iſoſcelia ſunt, & æqualia triangula ACB, BCD (cor. 2. prop. 3.). Quare AC = DC = BC; & propter latus commune BC punctum interſectionis C rectarum AC, BC cadet in punctum interſectionis C rectarum BC, DC. Idem valet de aliis rectis EC, FC &c.

COR. III. Radii e centro polygoni regularis ad angulos ducti polygonum dividunt in tot triangula iſoſcelia & æqualia, quot ſunt polygoni latera; & quodlibet polygoni latus fit chorda arcus, qui æqualis eſt quoto ex gradibus 360 per numerum laterum diviſis. Ita latus decagoni eſt chorda arcus grad. 36.

COR. IV. Latus hexagoni regularis circulo inſcripti æquale eſt circuli radio. Nam ſi ex centro C in ſex triangula dividatur hexagonum, æquilatera ſunt triangula illa ob radios CA & CB æquales, & angulum ACB = gr. 60 Quare ſinguli anguli CAB, ABC ſunt etiam 60 gr., ac proinde CA = AB.

COR. V. Quodlibet polygonum regulare circulo circumſcribi poteſt, hoc eſt, intra polygonum regulare deſcribi poteſt circulus, qui ſingula tangat polygoni latera. Etenim cum latera polygoni regularis circulo inſcripti totidem ſint chordæ æquales, chordæ illæ a centro æqualiter diſtant (cor. 1. prop. 2. cap. 2.). Quare ſi ex centro C agantur perpendiculares CI, CK, hæ chordas æqualiter divident, atque æquales erunt. Ergo per ſingulas perpendicularium extremitates deſcribi poterit circulus, qui ſingula polygo-

ni

ni latera in puncto medio tanget (cor. 1. prop. 3. cap. 2.)

COR. VI. Hinc polygono regulari dato circulus circumscribi potest. Quæratur polygoni centrum: quo invento, circulus facile circumscribitur. Item polygono regulari circulus facile inscribitur invento polygoni centro: ad latus aliquod demittatur perpendicularis, hæc erit circuli radius.

Viceversa polygonum regulare circulo dato circumscribi potest. Dividantur 360 gr. per duplum numerum laterum polygoni, sumptoque arcu iK, qui sit quoto æqualis, per extremitates K & i ducatur radius CK; agaturque recta indeterminata CB ad punctum K, erigatur perpendicularis DKB occurrens CB in puncto B, transferatur KB in KD; erit BD latus polygoni quæsiti. Simili modo inveniuntur alia latera. Vel etiam radio CB describatur circulus; & per totam circumferentiam transferatur chorda DB, atque inscribatur polygonum DBAGFE, quod erit circulo dato circumscriptum, ut patet; cum per constructionem tot habeantur tangentes æquales, & æqualiter divisæ in puncto contactus, quot sunt latera in polygono quæsito.

Simili constructione circulo dato polygonum regulare inscribitur. Dividatur numerus 360 gr. per numerum laterum polygoni quæsiti, sumatur in circulo dato arcus huic quoto æqualis; chorda hujus arcus erit latus polygoni: transferatur chorda illa per totam circumferentiam, habebitur polygonum quæsitum.

Hic autem diligenter observandum est, per Geometriam elementarem circulo inscribi posse

posse dumtaxat triangulum æquilaterum, quadratum, pentagonum, pentedecagonum, hoc est, figuram quindecim laterum, & polygona regularia, in quibus numerus laterum, se habet in progressione geometrica dupla. Ita triangulum æquilaterum præbet polygona regularia laterum 6, 12, 24, 48 &c. quadratum præbet polygona laterum 8, 16, 32, 64 &c. Ex pentagono oriuntur polygona laterum 10, 20, 40, 80 &c. Tandem ex pentedecagono oriuntur polygona laterum 30, 60, 120, 240 &c. Alia polygona, ut Eptagonum, Enneagonum, Endecagonum &c. describi non possunt geometrice, nisi per constructionem æquationum, quæ ad subliniorem gradum assurgunt.

SCHOL. Cum polygonum regulare circulo inscribi, & circumscribi possit, quo major est in polygono inscripto, vel circumscripto laterum numerus, eo magis polygonum ad circulum accedit. Itaque augeatur numerus laterum polygoni in infinitum, ita ut differentia inter polygonum, & circulum sit data quavis differentia minor: jam circulus considerari potest tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis, & infinite parvis compositum. Hæc circuli consideratio pendet ex principio omnino evidenti. Si nempe duarum quantitarum A & B differentia sit qualibet assignabili minor, quantitates illæ velut æquales haberi debent. Etenim ponatur inter illas quantitates differentia aliqua data, jam quantitatum illarum differentia non est qualibet assignabili minor, quod est contra hyp. Quantitas autem, quæ ad aliam accedit pro differentia qualibet data minori, hujus alterius quantitatis

limes

limes appellatur. Methodus autem illa vocatur methodus *Exhaustiorum*, seu *primarum*, & *ultimarum* rationum. Hanc methodum, quam fusins explicabimus in prima parte Physices, ubi sermo erit de extensionis divisibilitate, in proximo Capite, quantum hactenus nobis satis est, breviter exponemus.

CAPUT IV.

De linearum ratione, seu de proportionalibus.

PROP. I. IN TRIANGULIS SIMILIBUS acb, ACB (Fig. 13. & 14.) LATERA HOMOLOGA SUNT PROPORTIONALIA. Ponatur ab pars dimidia rectæ AB; nempe sit Ab æqualis rectæ ab, agaturque cg parallela rectæ AB; erit cg = bA. Quod evidens est ex linearum parallelismo; ducta enim linea bg, erit ob angulos inter parallelas æquales, & ob latus commune bg, triangulum bcg æquale triangulo bgB, & latus cg = bB (cor. 1. prop. 3. cap. præc.). Ergo cg = bB = Ab. Præterea triangulum Ccg æquale est triangulo cAb (loco cit.) Ergo Cc = Ac, & Cg = cb = gB. Quare Ac, vel Cc erit pars dimidia rectæ AC; sicut cb est pars dimidia rectæ CB.

Si ab sit tertia, vel quarta, aut quælibet alia pars rectæ AB, simili modo evidens est, rectas ac & cb esse tertiam, quartam &c. partem rectarum AC, CB. Etenim ex divisionum punctis b, f in recta AB ducantur bc, fh, &c. rectæ BC parallelæ, & eadem ratiocinatione patet, triangula Acb, chg, hCi &c. æqualia esse triangulo acb, seu triangulo Acb.

Si

Si recta ab accurate non contineatur in AB, sed cum fractione aliqua, E. G. bis cum dimidio; simili ratione ac bis cum dimidio continebitur in AC, & bc in BC. Etenim factis duobus triangulis Acb, chg æqualibus triangulo acb, inter parallelas hf, & CB construi poterit triangulum hCi, cujus latera erunt dimidia pars laterum trianguli cAb; quod est evidens, cum sit fB pars dimidia rectæ Ab, (per hyp.) & recta ih æqualis rectæ fB ob parallelas hf & CB.

Tandem ponamus in triangulis ACB & hCi rectas AB & ih esse inter se *incommensurabiles*: divisa intelligatur recta ih in partes 100, jam recta AB certum continebit partium numerum cum aliquo residuo, cum lineæ illæ sint incommensurabiles. Rursus recta ih divisa fingatur in partes 1000, certum earumdem partium numerum continebit recta AB, sed cum residuo, quod priori residuo minus est: atque ita deinceps minus perpetuo fiet residuum, quo plures erunt partes. Quare ponatur partium numerus infinitus, jam residuum fit nullum. Ergo generatim triangula quælibet similia latera homologa habent proportionalia.

COR. Numerus quilibet partium in CB erit ad numerum partium in CA inter easdem parallelas, ut numerns quilibet alius partium CB ad numerum partium in CA inter easdem parallelas. Etenim Ch : hc = Ci : im, & Ch : Ci = hc : im. Item hc : cA = im : mB, & hc : im = cA : mB. Ergo Ch : Ci = hc : im = cA : mB. Quare CA est ad CB, ut numerus quilibet partium in CA ad eumdem numerum partium in CB.

PROB.

PROB. II. DUO TRIANGULA, IN QUIBUS LATERA HOMOLOGA SUNT PROPORTIONALIA, ÆQUIANGULA SUNT. Si (Fig. 10.) ponatur AC : BC = FE : FD, & AC : AB = FE : ED, æquiangula erunt triangula ABC & EDF. Nam si super EF construatur triangulum FGE triangulo ABC æquiangulum, facto scilicet angulo GEF = BAC, & angulo GFE = ACB, & angulo FGE = CBA; erit AC : BC = FE : FG : sed (per Hyp.) AC : BC = FE : FD; ergo FE : FG = FE : FD, ac proinde FD = FG. Similiter ob triangula ABC, FGE similia, erit AC : AB = FE : FG : sed (ex Hyp.) AC : AB = FE : ED; ergo FE : EG = FE : ED; ac proinde EG = ED. Quare triangula duo FED & FEG æquiangula sunt, & æqualia, ob latus commune FE, & latera FD, FG, & EG, ED æqualia (prop. 3. cap. præc.) Sed (per constr.) triangulum FGE triangulo ABC est æquiangulum; ergo triangulum FED ipsi quoque est æquiangulum.

COR. I. Si in triangulis ABC & EDF sit angulus D = B, & præterea DE : DF = BA : BC; erit triangulum EDF triangulo ABC æquiangulum. Nam super AB capiatur Be = DE, ducaturque ef parallela rectæ AC; triangula ABC & eBf sunt æquiangula; cum ob parallelam ef angulus feB = A, efB = C, & ob angulum B communem. Ergo Be : Bf = BA : BC. Sed (ex Hyp.) DE : DF = BA : BC, ergo Be : Bf = DE : DF; at Be = DE; ergo Bf = DF: ac proinde duo triangula Bef, DEF sunt æqualia, & similia; sed Bef est triangulo BAC æquiangulum, ergo triangu-

gulum EDF est æquiangulum triangulo ABC; ac proinde generatim triangula, quorum latera duo homologa circa æqualem angulum sunt proportionalia, sunt æquiangula.

COR. II. Si recta AD (Fig. 15.) angulum BAC bifariam, & æqualiter dividat in triangulo BAC; eadem recta latus oppositum BC dividit quoque in duas partes BD & DC lateribus AB & AC proportionales. Etenim producta recta CA in E, per punctum B agatur BE rectæ AD parallela: triangula BCE, DAC erunt similia (prop. 1.) ac proinde BD : DC = AE : AC; sed ob parallelas angulus BEA = DAC = DAB = ABE; ergo triangulum BAE est isosceele (cor. 2. prop. 2. cap. præc.): quare AE = AB, ideoque BD : DC = AB : AC.

COR. III. Si ex angulo recto A trianguli rectanguli BAC demittatur perpendicularis AD in basim BC, quæ angulo recto imminet, & *hypothenusa* dicitur; hæc dividet triangulum in duo alia triangula BAD, DAC inter se, & triangulo BAC similia. Et quidem triangula BAD, DAC præter angulum rectum habent quoque cum triangulo BAC angulum communem; ac proinde similia sunt inter se, & toti triangulo. Hinc BD : DA = DA : DC, & BD : BA = BA : BC, ac tandem DC : CA = CA : CB.

COR. IV. Dum sit BD : BA = BA : BC, erit $BA^2 = BD \times BC$ (ob productum mediorum æquale producto extremorum). Similiter cum sit DC : AC = AC : CB, erit $AC^2 = DC \times CB$. Ergo BA^2

†

$+ AC^2 = BD \times BC + DC \times BC =$

$\overline{BD + DC} \times BC = BC \times BC = BC^2$. Quare quadratum hypothenusæ in triangulo rectangulo æquale est quadratis laterum.

COR. V. Diagonalis quadrati est lateri *incommensurabilis*. Cum enim diagonalis sit hypothenusa trianguli rectanguli, cujus latera sunt æqualia, quadratum diagonalis æquale est duplo quadrato lateris. Sed numeris exprimi non potest radix quadrati dupli (ex demonstratis in Arithmetica). Ergo si latus quadrati numeris exprimatur, exprimi non poterit diagonalis & contra.

COR. VI. Perpendicularis EO (Fig. 16.) ex circumferentiæ circuli puncto quolibet in diametrum demissa est media proportionalis inter duo segmenta CO & OL; nam si ex puncto E ad diametri extremitates agantur rectæ EC, EL; triangulum CEL est rectangulum in E, ac proinde $CO : EO = EO : OL$, & $EO^2 = CO \times OL$. Recta perpendicularis EO dici solet *ordinata*; *abscissa* autem vocatur pars CO diametri inter perpendicularem, & circumferentiam comprehensa.

PROP. III. SI DUCANTUR IN CIRCULO CHORDÆ DUÆ BA & DC (Fig. 17.) SE MUTUO SECANTES IN E, CHORDARUM SEGMENTA ERUNT RECIPROCE PROPORTIONALIA. Si enim ducantur DA & CB, triangula BEA & DEC sunt similia ob angulos in E æquales, atque ob angulos C, A, & B, D iisdem arcubus subtensos. Quare $AE : DE = CE : BE$.

COR.

COR. I. Si duæ lineæ EB, EC (Fig. 18.) ex eodem puncto extra circulum ductæ ad ſuperficiem concavam terminentur, partes externæ EA, ED rectis integris EB, EC ſunt reciproce proportionales. Ductis enim chordis AC, DB, triangula EBD, EAC ſimilia ſunt ob angulum E communem, & angulos B, C eodem arcu AD ſubtenſos. Ergo EA : ED = EC : EB.

COR. II. Si recta EB ſit ſecans, altera autem Ed tangens; erit EB : Ed = Ed : EA. Nam ductis dB, dA, ſimilia erunt triangula EdB, EdA ob angulum E communem, & angulos EBd, AdE æquales, quorum communis menſura eſt dimidius arcus Ad (cor. 3. prop. 4. cap. 2). Ergo angulus dAE = EdB, ac proinde EB : Ed = Ed : EA, hoc eſt, tangens eſt media proportionalis inter rectam totam EB, & partem externam EA.

COR. III. Hinc facile dividitur recta data bifariam, ea conditione, ut major pars ſit media proportionalis inter totam rectam, & ejuſdem rectæ partem alteram. Nam (Fig. 19.) ſuper datæ rectæ AB extremitatem erigatur perpendicularis AE dimidiæ AB æqualis, & centro E radio AE deſcribatur circulus DAF. Deinde per B & E agatur recta BF, & centro B, radio BD deſcribatur arcus DC; hic occurret rectæ AB in puncto quæſito. Etenim ob tangentem BA erit BF : BA = BA : BD; ac proinde BF — BA : BA = BA — BD : BD. Sed BF — BA = BD = BC; cum ſit FD = BA, utpote duplæ ipſius EA, quæ eſt dimidia rectæ AB. Simili modo BA — BD = AC; ergo ſubſtitutione facta, BC :

BA = AC : BC, vel BA : BC = BC : AC. In hoc corollario continetur problema, quod his verbis proponere solent Geometræ : *rectam dividere in media, & extrema ratione*.

Alia etiam problemata proponi solent, qualia sunt. *Tribus datis rectis quartam proportionalem invenire. Inter duas rectas invenire mediam proportionalem.* Sed hæc manifesta sunt ex præcedentibus.

PROP. IV. SI DUÆ FIGURÆ SIMILES IN TRIANGULA UTCUNQUE DIVIDANTUR PER DIAGONALES EX ANGULIS HOMOLOGIS DUCTAS, TRIANGULA HOMOLOGA ERUNT SIMILIA. Etenim sint duo polygona ABCDE & FGHIK (Fig. 20.) in quibus angulus A = F, B = G, C = H, D = I, E = K, sitque præterea AB : FG = BC : GH = CD : HI = DE : IK = EA : KF; ductis diagonalibus AC, AD, FH, FI, similia erunt triangula ABC, FGH, & ACD, FHI, atque ADE, FIK. Nam cum anguli B & G æquale sint, & lateribus proportionalibus comprehensi, similia erunt triangula ABC, FGH, & ADE : FIK. Itaque angulus BAC = GFH, DAE = IFK. Ergo BAE − BAC − DAE = CAD = GFH − GFH − IFK = HFI. Igitur angulus CAD = angulo HFI. Simili modo ostenditur, angulos ACD, FHI, & ADC, FIH æquales esse. Quare triangula ACD & FHI sunt æquiangula.

Viceversa duæ figuræ quelibet similes sunt, si in triangula æquiangula resolvi possint. Nam ob angulos æquales in triangulis æquiangulis æquales sunt anguli homologi in unaquaque figura. Quare cum latera figurarum sint

ſint triangulorum æquiangulorum latera proportionalia, figuræ ſimiles ſunt.

COR. IV. Si dividatur BC in L, latuſque homologum GH in M in eadem ratione; ita ut ſit $BC : GH = LC : MH$. Deinde ſi ducantur rectæ duæ ad arbitrium LN & MO, quæ angulos CLN, HMO æquales efficiant, vel quæ dividant latera homologa ED & KI in eadem ratione; ita ut ſit $ED : KI = DN : IO$; erit $LN : MO = CD : HI = BC : GH$ &c. Nam ductis NC & OH, triangula NCD, OHI ſimilia ſunt ob angulos D, I æquales lateribus proportionalibus NC, DC, & OI, IH comprehenſos. Quare $CD : HI = CN : HO$, & angulus $DCN = IHO$. Si ergo anguli illi auferantur ex angulis æqualibus DCL, IHM, remanebunt æquales anguli NCL, OHM; ac proinde triangula NCL, OHM ſimilia ſunt: ideoque $LN : MO = LC : MH = BC : GH = CD : HI$ &c. Quare generatim ſi in duobus polygonis ſimilibus ducantur lineæ, quæ dividant latera homologa, vel angulos homologos in eadem ratione, lineæ illæ erunt proportionales inter ſe, atque etiam eorumdem polygonorum lateribus quibuſcumque homologis.

SCHOL. Linearum rationem jam conſideravimus in quantitatibus finitis; ſupereſt, ut pauca, quantum nobis neceſſe eſt, explicemus de ratione quantitatum, quas *infinite magnas*, & *infinite parvas* appellant. Et in primis quidem obſervandum eſt, nullam quantitatem in ſe ſpectatam, & ſine noſtro cogitandi modo aut infinite parvam eſſe, aut infinite magnam, ſed magnitudo quælibet in

ſe determinata eſt. Et quidem data quavis magnitudine, utcunque parva, vel utcunque magna, alia ſemper minor in primo caſu, & alia ſemper major in caſu altero haberi poteſt. Nobis enim licet quantitatem exiguam, vel ingentem conſiderare, primamque minuere, alteram augere, abſtrahendo animum a quovis limite determinato; priorem quantitatem dicimus *infiniteſimam*, vel *infinite parvam*; quantitatem alteram appellamus *infinitam*, vel *infinite magnam*; rationem, quam duæ quantitates finitæ habent ad ſe invicem, *rationem finitam* vocamus. Patet autem, diverſos eſſe infinitorum, & infiniteſimorum ordines; licet enim magnitudo aliqua concipiatur infinita, vel infiniteſima; ſemper tamen quantitas manet, ac proinde ultra quoſcumque limites augeri poteſt & minui. Si quantitatem aliquam finitam ultra quoſcumque limites minui concipiamus, hanc dicimus infiniteſimam *ordinis primi*. Si autem quantitas alia ad hanc infiniteſimam habeat rationem, quam ipſa infiniteſima habet ad quantitatem finitam, quantitatem hanc dicimus infiniteſimam *ſecundi ordinis*, & ita deinceps. Viceverſa ſi quædam quantitas ſit ad finitam quantitatem, ut quantitas finita ad infiniteſimam ordinis primi, eam dicimus infinitam *ordinis primi*; & ita deinceps ſuperiores infinitorum ordines intelligere licet. Exemplum ſit in circulo, cujus diameter eſt ad chordam, ut eſt chorda ipſa ad abſciſſam; ac proinde ſi fingatur chorda infinite parva primi ordinis, erit abſciſſa infiniteſima ordinis ſecundi.

Ex his patet, calculo ſubjici poſſe quantitates

tes infinitas & infinitesimas. Infinitum hac nota exprimi solet ∞. Quare numerorum series infinita hoc modo repræsentari potest $0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 \ldots . \infty$. Pari modo quantitas quælibet finita concipi potest divisa in partes perpetuo decrescentes, donec perveniatur ad quantitatem infinitesimam. Talis est series, $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdots\cdots \frac{1}{\infty}$. Evidens autem est, quantitatem infinitam finitæ quantitatis additione, vel subtractione majorem, vel minorem non fieri; cum finita quantitas ad quantitatem infinitam rationem habeat qualibet data minorem: simili ratione, quantitas infinite parva quantitatem finitam augere, vel minuere non potest. Itaque $\infty = \infty \pm 1$, & $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$. Eodem modo si diversi infinitorum ordines per diversos exponentes designantur, erit $\infty^2 \pm a \infty = \infty^2$, & $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}$. Verum si quantitates ejusdem generis considerentur, sive infinitæ, sive infinitesimæ, ex notione quantitatum illarum manifestum est, eas non secus ac quantitates finitas tractari debere; probe enim recordandum est, quantitates illas non absolute, sed relative dumtaxat, & secundum nostrum concipiendi modum esse infinitas, vel infinitesimas. Quare $\infty \pm \infty = 2\infty$; $\frac{1}{\infty} \times 3^{\infty} = \frac{3^{\infty}}{\infty} = 3$; $\frac{2}{\infty}\ \frac{a}{\infty} = : \frac{2}{a}$; $\infty \times \infty = \infty^2$; $\frac{\infty 3}{\infty^2} = \infty$; $\frac{\infty^2}{\infty 3} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$;

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{\infty^2}{\infty} = \infty.$$

Ex his multa colligere est.

Quantitates infinitæ vel infinitesimæ ejusdem ordinis adduntur, vel subtrahuntur non secus, ac vulgares quantitates. Quantitas infinita primi ordinis per quantitatem infinitam ejusdem ordinis multiplicata producit quantitatem infinitam ordinis secundi. At quantitas infinita ordinis cujuscumque per quantitatem finitam multiplicata producit quantitatem infinitam ejusdem ordinis. Et generatim quantitas infinita cujusvis ordinis per aliam quantitatem ordinis cujuscumque multiplicata evehitur ad illum infiniti gradum, cujus exponens est ipsa exponentium summa. Contraria autem ratione si quantitas infinita ordinis cujuscumque per quantitatem infinitam ordinis cujuslibet dividatur, habetur quantitas, cujus gradus designatur per ipsam exponentium differentiam. At si quantitas infinitesima cujuslibet gradus per quantitatem infinitesimam ordinis cujuscumque multiplicetur, aut dividatur; in primo casu quantitas infinitesima ad eum deprimetur gradum, qui per exponentium summam exhibetur; in casu autem altero quantitas infinitesima ad eum gradum evehitur, qui per ipsam exponentium differentiam repræsentatur, ita ut quantitas infinitesima per divisionem fieri possit finita, atque etiam infinita. Hæc pauca dicta sint *de primarum, & ultimarum rationum* methodo, quam quidem ad methodum *exhaustionum* revocari posse intelligitur.

AP-

APPENDIX.

De proportionum usu in triangulorum resolutione, sive de Trigonometria.

I. EX linearum proportione tota pendet *Trigonometria*, quæ est ars resolvendi triangula. In triangulo autem sex partes considerari possunt, nempe tres anguli, & tria latera. Huc autem refertur Trigonometriæ praxis, ut datis tribus ex sex partibus trianguli, partes reliquæ inveniantur; ac proinde tres partes datæ constituere debent tres primos proportionis terminos, & terminus quartus erit pars quæsita. Verum quia latera trianguli expressam rationem non habent cum angulis, quorum mensura sunt arcus circuli; angulis, vel arcubus circuli substituuntur lineæ rectæ, quæ arcus illos exhibeant, & trianguli lateribus proportionales sint. Harum linearum definitiones afferemus, & proprietates demonstrabimus.

Sit angulus quilibet ACB (Fig. 21.), ex cujus vertice C, tanquam centro, & radio ad arbitrium sumpto describatur circulus AHaG. Producatur AC in a, erigaturque in C perpendicularis CH; evidens est, angulum BCH, vel arcum HB esse *complementum* anguli ACB, vel arcus AB; angulus BCa, vel arcus Ba est *supplementum* anguli ACB, vel arcus AB, & viceversa BA est *complementum* ipsius HB, & *supplementum* ipsius aB. Recta BD ex radii extremitate B ad radium CA perpendiculariter ducta dicitur *sinus* arcus AB, vel

anguli ACB. Recta AE ex radii extremitate A perpendiculariter ducta & radio alteri occurrens in E vocatur *tangens* arcus AB; recta autem CE ejusdem arcus *secans* appellatur. Pars AD radii inter arcum, & sinum comprehensa dicitur *sinus versus* arcus AB. Perpendicularis BI dicitur *sinus complementi* arcus AB; perpendicularis HK *tangens complementi*; CK *secans complementi*, & HI *sinus versus complementi* arcus AB. Compendii ergo sinus complementi, tangens complementi &c. dicuntur *Cosinus*, *Cotangens*, *Cosecans*, *Cosinus versus*. Brevitatis causa scribuntur R pro radio; sin. pro sinu; tang. pro tangente; sin. v. pro sinu verso.

II. Ex his definitionibus multa colliguntur 1. Sinus, cosinus, tangens, cotangens &c. anguli obtusi BCa sunt etiam sinus, cosinus &c. anguli acuti ACB, qui est anguli obtusi supplementum. Nam ex radii alterutrius extremitatibus B, vel a demitti non potest perpendicularis, quæ non cadat in radium alterum productum; tales sunt perpendiculares BD, ad; similiter tangens alia esse non potest, quam ae; sed ob triangula aCd, BCD, & Cae, CAE æqualia, habetur ad = BD, & ae = AE. Cum autem sit arcus BH complementum arcus AB, evidens est, BI esse cosinum arcus AB & HK illius cotangentem .... 2. Sinus BD arcus AB est dimidium chordæ BG, arcum duplum BAG subtendentis. (Prop. 1. cap. 2.) .... 3°. Sinus crescunt crescentibus angulis a 0 usque ad 90 gr., & eodem modo decrescunt a 90 gr. usque ad 180 gr. .... 4°. Sinus arcus 30 gr. dimidio

mi dio radio æqualis eſt; eſt enim radius æqualis chordæ arcus 60 gr. (cor. 4. prop. 5. cap. 3.) & ejuſdem arcus ſinus eſt dimidia chorda arcus dupli. Itaque in triangulo rectangulo latus oppoſitum angulo 30 gr. eſt dimidia hypothenuſa hujus trianguli. Nam ſi ACB = 30 gr., erit BG = BC, & BD = ½ BC .... 5°. Tangentes creſcunt, creſcentibus angulis a 0° uſque ad 90 gr., ita ut tangens arcus grad. 90 ſit infinita; nam radius CH in angulo recto HCA non poteſt concurrere cum tangente .... 6°. Tangens arcus 45 gr. æqualis eſt radio; nam ſi angulus ACB ſit 45 gr. triangulum rectangulum CAE erit iſoſceles, & AE = AC .... 7. Sinus verſus AD arcus, qui minor eſt 90 gr. æqualis eſt differentiæ inter radium CA, & coſinum CD = BI. Præterea coſinus verſus HI eſt differentia inter radium CH, & ſinum CI = CD. at ſinus verſus ſupplementi nempe Da æqualis eſt ſummæ radii, & coſinus .... 8. Ob triangula rectangula ſimilia CDB, CAE, CIB, CHK, erit CA: CD, vel BI = AE: BD, nempe radius eſt ad coſinum, ut tangens ad ſinum. Deinde hæc alia habetur analogia CH: CI, vel BD = HK: IB, hoc eſt, radius ad ſinnm, ut cotangens ad coſinum. Tandem AE: CA = CH, vel CA: HK; hoc eſt tangens ad radium, ut radius ad cotangentem .... 9. Ex præcedentibus analogiis derivantur formulæ, quarum ope ſinus ſubſtituuntur tangentibus, & vice verſa. Sit R = 1, erit Sin. =

$$\text{Coſ.} \times \text{Tang.} = \frac{\text{Cos.}}{\text{Cot.}}; \text{ Coſ.} = \text{Sin.} \times \text{Cot.}$$

$\times$ Cot. $=$ $\frac{\text{Sin.}}{\text{Tang.}}$; Tang. $=$ $\frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}}$ $=$ $\frac{1}{\text{Cot.}}$; Cot. $=$ $\frac{\text{Cos.}}{\text{Sin.}}$ $=$ $\frac{1}{\text{Tang.}}$; Cot. A $\times$ Tang. A $=$ 1 $=$ Cot. B $\times$ Tang. B .... 10. In omni triangulo ſinus angulorum ſunt, ut latera angulis oppoſita. Etenim triangulum circulo inſcribatur: ſingula latera ſunt chordæ arcus dupli, qui eſt menſura anguli oppoſiti. Quare dimidium latus eſt ſinus anguli oppoſiti. Sed ſemiſſes ſunt inter ſe, ut tota; ergo latera ſunt, ut ſinus angulorum oppoſitorum. Hinc cum ſinus anguli recti ſit radius, & latus oppoſitum ſit hypothenuſa, erit in triangulo rectangulo radius ad hypothenuſam, ut ſinus anguli unius acuti ad latus eidem angulo oppoſitum .... 11. In triangulo rectangulo coſinus anguli unius acuti eſt ſinus anguli alterius; ergo ſinus anguli unius acuti eſt ad ſuum coſinum, ut latus huic angulo oppoſitum eſt ad latus alterum; ſed ſinus eſt ad coſinum, ut tangens ad radium; ergo in triangulo rectangulo tangens anguli unius acuti eſt ad radium, ut latus huic angulo acuto oppoſitum eſt ad latus alterum. 12. In triangulo quolibet ABC (Fig. 22.) hæc ſemper habetur analogia: majus latus AC eſt ad ſummam duorum aliorum laterum AB + BC, ut eorumdem laterum differentia AB — BC ad differentiam ſegmentorum AE, & CE, quæ fiunt ducta ex angulo majori B in majus latus AC perpendiculari BE. Nam ſi ex anguli vertice B tan-

B tanquam centro, & radio, qui sit minori lateri æqualis BC, describatur circulus GCD, producto latere AB in G; erit $AG = AB + BC$, & $AP = AB - BC$; atque ob $CE = ED$, erit $EA - CE = AD$, ac tandem $AC : AG, = AP : AD$.

III. Si in arcu quolibet AB (Fig. 21.) detur sinus, aut cosinus, sinusversus, aut cosinusversus, ex uno dumtaxat dato tria reliqua inveniuntur. Nam $CD = \sqrt{CB^2 - BD^2}$ & $Cos. = \sqrt{R.^2 - Sin.^2}$ Præterea $DA = CA - CD$, & $Sin.\ versus = R - Cof.$ Tandem $HI = CH - CI$, & $Cof.\ versus = R - Sin.$ Initis calculis in arcu quodlibet pro dimidio vel duplo arcu calculus facile institui potest. Nam (Fig. 23.) ducta chorda BA, & ex puncto C demissa perpendiculari CE, datisque BD, DA; erit $BA = \sqrt{BD^2 + DA.^2}$ Quare FA, vel $Sin.\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{Sin.^2 + Sin.\ verf.^2}$. Et $CF = \sqrt{CA_2 - AF_2}$. Ergo $Cof.\ \frac{1}{2} = \sqrt{RR - Sin.^2\ \frac{1}{2}}$. Præterea si habetur AE, tanquam arcus datus, similia erunt triangula FCA, DBA; quare $CA : CF = AB : BD$, vel $R : Cof.\ arc = 2.\ Sin.\ arc : Sin.$ arcus dupli. Quod facile colligitur ex præcedentibus, sed tamen demonstratur. Datis enim sinubus BD, KL duorum arcuum AB, KB, habetur sinus KM illorum summæ (Fig. 24.), vel illorum differentiæ (Fig. 25.). Etenim datis CD, CL, erit $CB : CL = BD : LP$, vel OM; ergo $OM = \frac{Sin.\ AB \times Cof.\ KB}{R}$. Præterea ob trian-

gula rectangula similia KOL, OLQ, CMQ, CBD (Fig. 24.) & KOL, KMQ, CQL, CBD (Fig. 25.) in triangulis KOL, CBD erit CB: CD = KL: KO. Quare KO = $\frac{\text{Sin. KB} \times \text{Cos. AB}}{R}$. Hinc facto R = 1, erit KM, vel Sin. BK + AB = Sin. BK × Cos. AB + Sin. AB × Cos. KB. Sit arcus AB 30 gr. (Fig. 26.) & BF = BK; ob triangula rectangula similia SIF, SQG, erit angulus IFS = GQS = BCA = 30 gr. Ergo angulus KFC = 30 gr. Quare CK = $\frac{1}{2}$ FK = IK = FI. Sed $FK^2 - CK^2 = FG^2$ vel $4IK^2 - IK^2 = FG^2$. Ergo $3IK^2$ vel $IK^2 \times 3 = FG^2$. Quare IK × $\sqrt{3}$ = FG, & IK × $\sqrt{3}$ + KM = FN; hoc est, sinus KM arcus KA, minoris scilicet, quam 30 gr. & sinus KI, differentiæ scilicet inter hunc arcum, & 30 gr. per $\sqrt{3}$ multiplicatus simul sunt æquales sinui FN arcus FA, qui tanto major est arcu 30 gr. quanto arcus KA minor est. Ob arcum FI = GK, erit FT + GH = KO, nempe sinus FT arcus HF minoris, quam 60 gr. & sinus FI, differentiæ scilicet inter hunc arcum, & 60 gr. simul æquantur sinui KO arcus HK, qui tanto major est arcu 60 gr. quanto FK minor est. Ita Sin. 55 gr. + Sin. 5. gr. = Sin. 60 gr. Itaque demonstravimus principia, quorum ope formari possunt sinuum, & tangentium tabulæ. Illæ autem tabulæ commoditatis ergo per logarithmos construuntur, cujus quidem constructionis ratio ex logarithmorum doctrina jam explicata intelligitur.

III. In

III. In omni triangulo ABC (fig. 22.) summa duorum laterum quorumcumque AB + BC est ad illorum differentiam AB − BC, ut tangens semisummæ duorum angulorum A, & C, qui his lateribus opponuntur ad tangentem semidifferentiæ eorumdem angulorum. Etenim sit P semisumma angulorum A, & C; & Q illorum semidifferentia: erit angulus major C = P + Q, & minor A = P − Q. Jam (ex dem.) AB : BC = S. C : S. A = S. $\overline{P + Q}$: S. $\overline{P - Q}$ = S. P × cos. Q + cos. P × S. Q : S. P × cos. Q − cos. P × S. Q. Ergo AB × S. P. × cos. Q − AB × cos. P × S. Q = BC × S. P × cos. Q + BC × cos. P × S. Q; vel $\overline{AB - BC}$ × S. P × cos. Q = $\overline{AB + BC}$ × cos. P × S. Q. Quare dividendo per cos. P × cos. Q, factaque reductione, habebitur $\overline{AB - BC} \times \frac{S. P}{cos.} = \overline{AB + BC} \times \frac{S. Q}{cos. Q}$. Sed $\frac{Sin.}{Cos.}$ = tang. Ergo $\frac{AB - BC}{AB + BC}$ × tang. P = tang. Q. Quare AB + BC : AB − BC = tang. P : tang. Q = tang. $\frac{A + C}{2}$: tang. $\frac{A - C}{2}$.

IV. His principiis universa innititur Trigonometria. Et quidem in triangulorum resolutione vel dantur tria latera, vel duo tantum, & angulus, vel duo anguli, & latus unum. Porro datis in triangulo tribus, quæ jam

jam diximus, reliqua inveniuntur per hactenus demonstrata. At monendum est, datis tribus angulis dumtaxat, inveniri tantum rationem laterum, quæ sunt, ut sinus angulorum oppositorum; minime autem invenitur eorum valor, cum infinita possint construi triangula similia inæqualia. Neque etiam sine observatione prætermittendus est casus, in quo dantur duo latera, & angulus alterutri lateri oppositus. Casus ille est ambiguus, & duas solutiones potest admittere; cum (ex dem.) sinus anguli acuti sit quoque sinus complementi ad duos rectos. Quare, ut tollatur ambiguitas, nota sit, oportet anguli species, hoc est, notum esse debet, an angulus sit acutus, vel obtusus.

In omnibus Trigonometriæ libris reperiuntur sinuum, & tangentium tabulæ. Quamvis autem ex hactenus demonstratis manifestum sit, quo artificio construantur; id tamen breviter declarabimus. Dato sinu graduum 30 per antea demonstrata, inveniri possunt sinus grad. 15, deinde $7\frac{1}{2}$, postea $2\frac{1}{2}$, & ita sinuum semisses, progrediendo usque ad duodecimam operationem, nempe usque ad $52'' \; 43''' \; 3'''' \; \frac{1}{4}$; qui quidem sinus sine errore sensibili cum arcu confunditur quia vero sinus illi minime sunt arcubus proportionales, dici potest: ut arcus ille minimus est ad suum sinum; ita arcus $1'$ est ad suum sinum. Dato autem sinu arcus $1'$, invenietur sinus arcuum $2 \; 3' \; 4'$ &c. & ita deinceps usque ad 30 gr. Tandem a 30 gr. usque ad 60 gr., & a 60 gr. usque ad 90 gr. progredi licebit: quo facto tangentes ad calculum revocare jam facile erit.

SE-

SECTIO II.

De Geometria superficierum.

CAPUT I.

De præcipuis planarum superficierum proprietatibus.

PROP. I. TRIA PUNCTA, QUÆ IN EADEM RECTA NON JACENT, PLANI POSITIONEM DETERMINANT. Id patet ex definitione ipsius plani. Et quidem per tria puncta duci potest planum, quod evidens est; illud vero planum unicum esse, manifestum est; ponamus enim, planum aliud, quod cum primo in tribus punctis congruat, in aliis autem ab ipso deflectat: in eadem linea recta, quæ primo in plano jaceret, alteri plano aptari perpetuo non posset, neque secunda superficies illa foret omnium intra eosdem terminos ductarum brevissima; quod est contra definitionem plani. Ergo per tria puncta unicum planum duci potest; ac proinde constans est, ac determinata positio plani per data tria puncta transeuntis.

COR. I. Duæ rectæ se invicem secantes sunt in eodem plano. Nam punctum intersectionis, & punctum quodlibet aliud in binis lineis pro arbitrio sumptum tria sunt puncta in directum non posita, quæ proinde determinant positionem plani, in quo jacent duo utriusque lineæ puncta, ac proinde & totæ binæ lineæ (ex def.)

COR. II. Si duæ rectæ jacentes in eodem

dem plano tertia recta secentur, recta secans in eodem quoque jacebit plano. Nam duo ejusdem lineæ puncta, duæ scilicet intersectiones, sunt in eodem plano. Si autem ponamus, duas rectas se mutuo secare, patet, in hoc casu demonstrationem non valere, nisi tertia linea secans extra punctum intersectionis transeat; alioquin unicum haberetur punctum, quod rectæ positionem non determinat.

COR. III. Duorum planorum intersectio est linea, cujus singula puncta jacent in utroque plano. Patet autem, tria puncta duobus planis communia esse non posse, nisi jaceant in directum. Cum enim tria puncta, quæ non sunt in eadem recta, positionem plani determinent; si tria puncta in directum non posita duobus planis communia esse possent, jam tria puncta positionem plani non determinarent. Quare planorum duorum intersectio est linea recta,

COR. IV. Recta ad planum perpendicularis insistit quoque perpendiculariter ad rectas singulas in eodem plano jacentes & per extremitatem perpendicularis transeuntes. Etenim ponamus, rectam illam ad planum perpendicularem non insistere perpendiculariter ad aliquam ex prædictis lineis; jam linea illa infra planum deprimitur, vel attollitur supra idem planum; ac proinde non jaceret in eodem plano (quod est contra hypoth.)

COR V. Duæ rectæ ad idem planum perpendiculares, vel æqualiter inclinatæ, sunt inter se parallelæ, & contra. Etenim rectarum illarum extremitates communi recta in plano jungantur; duæ illæ lineæ ad planum

perpen-

perpendiculares, vel æqualiter inclinatæ erunt quoque perpendiculares, vel æqualiter inclinatæ ad eamdem lineam jungentem; est enim in eodem plano. Quare (ex parallelarum def.) rectæ illæ erunt parallelæ, & vice versa.

PROP. II. DUO PLANA SIBI MUTUO INCLINATA EASDEM HABENT PROPRIETATES, QUAS DE RECTIS AD SE INVICEM INCLINATIS DEMONSTRAVIMUS. Ponamus, planum aliquod A immobile, in quo jaceat planum aliud B lineis rectis terminatum, qualia sunt polygona rectilinea: hæc duo plana, utpote omni crassitie destituta, in unum coalescunt planum. At si planum B revolvi intelligatur circa latus aliquod plani A, fixum perpetuo manens, totum plani motum sibi facile quisque repræsentabit. Et quidem 1°. ab ipso motus initio nihil duobus planis manebit commune præter rectam, circa quam planum B revolvitur, quæ proinde est utriusque plani intersectio .... 2°. planum illud singulos percurret inclinationis gradus, si tandiu convertatur, donec ad oppositam plani A partem perveniat .... 3° Planum revolvens plano immoto fiet perpendiculare, ubi ad eum pervenerit situm, in quo non magis pendeat ex una parte, quam ex alia ..... 4°. Singulos inclinationis gradus metietur arcus circuli, cujus centrum perpetuo manebit in communi planorum intersectione. Quia vero centrum in ipso circuli plano jacet, necessum est, hujus arcus centrum esse in linea recta, cujus revolutione generatur ipsum arcus planum ... 5°. Si concipiatur linea quædam sublimis, cui perpendiculariter affixa sit recta alia; hæc recta planum describet, interea dum linea

linea ſublimis circa ſeipſam convertitur in eodem perpetuo manens loco. Si autem duæ lineæ ſibi invicem non forent perpendiculares, jam figura revolvendo deſcripta plana non foret; ſed ex una parte convexa, & ex altera concava, ut patet. Quare ex ipſa plani formatione evidens eſt, revolutione rectæ planum deſcribi non poſſe, niſi recta revolvens ſit ad lineam, in qua revolvitur, perpendicularis ... 6. Centrum arcus, in quo ſumuntur gradus inclinationis plani unius ad aliud, poſitum eſt in perpendiculari ex puncto quolibet arcus ad planorum interſectionem ducta. Quare ſi deſcribatur ſemicirculus, cujus centrum ſit in linea duobus planis communi, & cujus planum ſit ad planum immotum perpendiculare; per hujus ſemicirculi gradus metiri licebit omnes plani mobilis inclinationes. Quare generatim plana duo ad ſe invicem inclinata eaſdem habent proprietates, quæ in mutua linearum inclinatione demonſtrantur.

COR. I. Planum plano occurrens vel duos angulos rectos facit, vel duobus rectis æquales. (Prop. 1. cap. 1.)

COR. II. In planorum interſectione æquales ſunt anguli ad verticem oppoſiti. (Cor. 2. Prop. 1. cap. 1.)

COR. III. Si plana quotlibet eamdem habeant communem interſectionem, ſummæ angulorum omnium eſt 360. gr. (Cor. 1. Prop. 1. cap. 1.)

COR. IV. Ex puncto dato extra planum, vel intra planum unica perpendicularis ad planum duci poteſt. (Cor. 4. prop. 1. cap. 1.)

COR. V. Diſtantia puncti alicujus a plano

no dato est perpendicularis ex puncto dato ad plenum ducta (ex def.)

COR. VI. Planum secans duo, vel plura plana parallela efficit angulos alternos externos æquales, item æquales angulos alternos internos. Præterea angulus internus alterius interni supplementum est atque etiam angulus externus est supplementum alterius (Prop. 2. cap. 1.)

COR. VII. Si duo, aut plura plana parallela alio plano secentur, communes intersectiones erunt parallelæ. Si enim non sint parallelæ, sibi occurrere possunt, ac proinde & plana ipsa, in quibus hæ lineæ jacent; ideoque plana non forent parallela, quod est contra hyp.

CAPUT II.

De superficierum mensura.

PROP. I. SUPERFICIES PARALLELOGRAMMI RECTANGULI ÆQUALIS EST PRODUCTO EX BASI IN ALTITUDINEM. Sit parallelogrammum rectangulum ABCB (Fig. 26.), cujus altitudo AD certum contineat pedum numerum: E. G. 7; basis autem AB contineat 8. Divisum intelligi poterit parallelogrammum in 7 superficies, ut DM, quæ singulæ continent octo minores superficies quadratas, sive octo pedes *quadratos*, ut vocant. Quare habebitur parallelogrammi totius superficies, si octo pedes quadrati, qui prima superficie continentur, toties sumantur, quot sunt æquales superficies, ut DM; ac proinde superficies tota parallelogrammi erit 7 × 8, nempe 56 pedum quadratorum.

Evi-

Evidens est, in hac demonstratione fingi posse alium quemlibet partium numerum, atque eadem valet demonstratio, etiamsi altitudo, & basis parallelogrammi ponantur *incommensurabiles*, ut patet ex Prop. 1. cap. 4.

COR. I. Si parallelagrammum BD per diagonalem dividatur, habebuntur triangula duo rectangula æqualia; quorum proinde superficies, utpote dimidia parallelogrammi, erit dimidium productum ex basi in altitudinem.

Eadem est demonstratio pro triangulo quolibet etiam non rectangulo. Sit enim triangulo CAB (Fig. 27.) non rectangulum. Ex puncto A demittatur perpendicularis AD, compleaturque rectangulum FCBE, erit triangulum CAD dimidium rectanguli FACD, & triangulum DAB dimidium rectanguli DABE. Quare, ut ante, superficies trianguli est dimidium productum ex basi in altitudinem.

Idem patet, etiamsi perpendicularis EB trianguli CED cadat extra basim. Nam triangulum DEB est dimidium rectanguli DAEB, & triangulum CEB est dimidium rectanguli CFEB; ergo triangulum CED, seu CEB − DEB $= \frac{1}{2}$CB×AD − $\frac{1}{2}$ DB ×AD $= \frac{CB - DB}{2}$ ×AD $= \frac{1}{2}$ CD×AD; ac proinde trianguli cujuslibet superficies æqualis est dimidio producto ex basi in altitudinem.

COR. II. Cum parallelogrammum quodlibet dividi possit in duo triangula æqualia, quæ ipsam habeant parallelogrammi basim, eamdemque altitudinem; patet generatim, super-

ſuperficiem parallelogrammi cujuſcumque eſſe productum ex baſi in altitudinem.

COR. III. Quotlibet triangula, ideoque etiam quotlibet parallelogramma inter eaſdem parallelas, & ſuper eadem vel æquali baſi conſtituta ſunt æqualia. Ergo etiam triangula inter eaſdem parallelas cum parallelogrammis conſtituta, & ſuper eadem baſi ſunt parallelogrammorum dimidia, ac proinde etiam inter ſe æqualia. Ex hac propoſitione pendet vulgaris demonſtratio theorematis, quod alio modo jam demonſtravimus; nempe *quadratum hypothenuſæ in triangulo rectangulo æquale eſſe quadratis laterum*. Hanc vero Geometriæ fœcunditatem, totiuſque doctrinæ geometricæ conjunctionem variis exemplis Tyronibus ſæpe oſtendere debet peritus magiſter.

COR. IV. Cum triangula ſunt, ut dimidium productum ex baſi in altitudinem, erunt etiam, ut productum totum; hoc eſt, triangulorum ſuperficies ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum; ac proinde ſi baſes fuerint æquales, triangula erunt inter ſe, ut altitudines; ſi autem altitudines fuerint æquales, erunt inter ſe, ut baſes.

COR. V. Si altitudo trianguli unius ſit ad trianguli alterius altitudinem, ut baſis ſecundi trianguli ad baſim primi, hoc eſt, ſi baſes ſint in ratione inverſa altitudinum, triangula ſunt æqualia. In hoc enim caſu habetur proportio, in qua productum extremorum æquale eſt producto mediorum, hoc eſt, productum ex altitudine primi trianguli in baſim æquale eſt producto ex altitudine ſecundi trianguli in ſuam baſim, ideoque triangula ſunt æqualia; & viceverſa ſi trian-

quidem ambo constant triangulis æqua bus. Porro per methodos explicatas in t triangulis haberi semper poterunt bases, qu in primo casu sunt circulorum chordæ, altero autem tangentes; ac proinde omniur quoque chordarum, & tangentium summ innotescet, hoc est, perimeter polygoni in scripti, quæ circuli circumferentia proxim minor est, & polygoni circumscripti peri meter, quæ proxime major est: ita ut defe-ctus, vel excessus, quantum cuique placuerit, tenuis sit, & intra angustissimos limites contrahatur. Hac methodo Archimedes invenit, diametrum ad peripheriam esse in ratione 7 ad 22; ita ut exiguus omnino sit peripheriæ sic inventæ excessus supra veram. Hæc eadem ratio subtilius ab aliis quæsita est, & statuitur, ut 1 ad 3. 14159265 &c. perductis decimalibus numeris usque ad notas 127; quæ quidem *approximatio* est fere infinita. Sed omnium vulgatissima ratio diametri ad peripheriam ea est, quam exprimunt numeri 113 & 355. Quare data circuli diametro habebitur peripheria, si hæc fiat proportio 113 ad 355, ut diameter data ad peripheriam quæsitam, hæc multiplicetur per quartam diametri partem, habebitur superficies circuli, sive, ut vocant, *area*. Hæc pauca dicta sint de ratione diametri ad peripheriam, sive de quadratura circuli, quam audacter se invenisse non raro jactitant viri Geometriæ imperiti, qui ipsum quidem quæstionis statum, ut plurimum, non intelligunt.

Simili methodo figura quælibet curvilinea generatim dividi potest in partes rectilineas. Aliquando per Geometriam sublimiorem figuræ curvilineæ area accurate haberi potest;

ſed commodiſſima, & generalis eſt praxis, quæ figuræ curvilineæ circumferentia in minimas partes, & *phyſice* rectilineas dividitur, & deinde figuræ totius area inveſtigatur, ut fieri ſolet in polygonorum menſura.

Porro dum ſupeficierum magnitudinem *pedibus quadratis*, aut alia qualibet menſura exprimimus, id nequaquam haberi debet tanquam contrarium iis, quæ de numerorum *concretorum* multiplicatione demonſtravimus in Arithmetica; non enim pedes per pedes multiplicantur. Ita dum parallelogrammi ſuperficies invenitur multiplicando baſim per altitudinem, hac operatione hoc unum ſignificant Geometræ; ſi nempe habeantur parallelogramma duo, adhibeaturque quantitas *linearis* quælibet a pro communi baſium, & altitudinum menſura, & ſit B numerus integer, aut fractus, rationalis, vel irrationalis exprimens, quoties baſis parallelogrammi unius contineat quantitatem a; atque H exprimat, quoties altitudo ejuſdem parallelogrammi eamdem contineat menſuram. Item ſit b numerus exprimens quoties menſura a contineatur in baſi alterius parallelogrammi; h autem exponat, quoties altitudo parallelogrammi ejuſdem contineat menſuram a; parellogrammorum illorum ſuperficies erunt inter ſe, ut productum ex duobus numeris B & H ad productum ex numeris duobus b & h. Hæc eſt genuina hujus operationis notio. Quare dum dicitur, parallelogrammi ſuperficiem æqualem eſſe producto ex baſi in altitudinem, *æqualitas* proprie dicta intelligi non debet, ſed mera proportio. Hæc eadem obſervatio ad Phyſicam ſæpe trans-

ferri debet, ubi de ſpatii, velocitatis, & temporis menſura ſermo eſt.

SECTIO III.

De Geometria Solidorum.

CAPUT I.

De Solidorum geneſi, & proprietatibus.

PROP. I. SOLIDORUM RECTILINEORUM GENESIM EXPLICARE. Si figura rectilinea AGR ſupra immotam rectam AE (Fig. 28) motu ſibi ſemper parallelo feratur; ſolidum AGROFE inde genitum *priſma* dicitur; & *rectum* vocatur, ſi AE deſcribenti plano recta fuerit; ſin minus, *obliquum*. Si planum deſcribens fuerit parallelogramum, ſolidum inde genitum dicitur *parallepipedum*. Si autem planum deſcribens ſit quadratum, ſolidum *cubus* nuncupatur. Baſis ſolidi, ſeu planum deſcribens poteſt eſſe polygonum quodlibet, & ſolidum inde genitum *priſmatis* nomen retinet, ſi e ſingulis polygoni angulis extra planum conſurgant lineæ æquales, & parallelæ terminantes rectilineam ſolidi faciem; at ſi rectæ lineæ in apicem coeunt, ſolidum *pyramis* dicitur (Fig. 29.).

COR. I. Priſma igitur oppoſita latera AGR, EFO æqualia habet, ſimilia, & parallela; cum AGR fluendo per AE motu ſibi ſemper parallelo tandem congruat cum EFO. Præterea dum planum AGR motu ſibi parallelo deſcribit priſma AGROFE, latera AG, GR, RA motu ſibi ſemper parallelo deſcribunt parallelogramma AEFG, GFOR, ROEA;

ROEA; ac proinde prisma tot parallelogrammis circumcirca terminatur, quot sunt latera plani describentis.

COR. II. Parallepipedum sex parallelogrammis terminatur; cubus autem sex quadratis æqualibus. Nam præter facies quatuor parallelo laterum motu genitas, sunt etiam facies duæ oppositæ parallelo basis motu descriptæ, Illa autem basis in primo casu est parallelogrammum, in altero autem quadratum.

COR. III. In pyrammide si omnia latera basis sunt æqualia inter se, & latera rectilinea ipsius pyramidis pariter inter se æqualia, erunt omnes facies triangulo isoscelia æqualia.

COR. IV. Quævis sectio prismatis, vel pyramidis facta plano basi parallelo est figura prorsus similis basi. Etenim sectionis parallelæ singula latera sunt singulis lateribus basis parallela; cum sint intersectiones planorum parallelorum cum iisdem planis. Quare singuli anguli homologi erunt æqales (Prop. 2. cap. præc.) ; ac proinde sectio basi similis est.

COR. V. In prismate sectio basi parallela ipsi basi æqualis est; in pyramide autem latera sectionis homologa sunt minora in ratione distantiæ sectionis a vertice ad distantiam basis ab eodem. In prismate patet æqualitas, cum facies sint parallelogramma; ac proinde latera sectionis homologa æqualia sunt lateribus basis; ideoque sectio prorsus æqualis est basi. In pyramide proportio etiam patet; nam ob sectionem parallelam in unaquaque facie habebuntur triangula duo similia.

COR. VI. Omnia prismata collata inter

 se,

se, atque etiam omnes pyramides inter se comparatæ, si super basibus æqualibus, & inter eadem plana parallela constituantur, solida respective æqualia comprehendunt. Secentur enim quotcunque planis, quæ sint basibus parallela; sectiones unius prismatis, vel pyramidis æquales semper erunt sectionibus respondentibus alterius. Nam in prismate omnes erunt æquales eidem basi; in pyramide erunt ipsi basi similes, & singula latera in una pyramide erunt ad latera homologa in pyramide altera in eadem data ratione, nempe in ratione distantiæ basis a vertice ad sectionis distantiam ab eodem vertice, quæ quidem ratio eadem est, ut patet; cum pyramides terminentur plano basium, & sectionum planis parallelo. Porro solida illa concipi possunt tanquam composita ex iis omnibus sectionibus, quarum singulæ cum singulis æquales sint; ergo erunt & ipsa solida æqualia.

COR. VII. Pyramides basium æqualium in eumdem apicem desinentes, vel eamdem utcunque altitudinem habentes sunt æquales. Nam per communem verticem ductum intelligatur planum basium planis parallelum; pyramides semper erunt super æqualibus basibus & in iisdem planis parallelis. Similiter si bases in eodem plano constituantur, vertices in eadem altitudine ad idem planum basibus parallelum terminabuntur.

COR. VIII. Si pyramides eamdem habeant altitudinem; erunt inter se, ut bases. Etenim basis major divisa intelligatur, si fieri possit, in partes basi minori æquales; concipi poterit pyramis major tanquam composita ex diversis pyramidibus, quæ basim habeant

habeant basi minori æqualem; sed pyramides illæ singulæ erunt minori pyramidi æquales; ergo pyramis major est ad minorem, ut pyramidum æqualium numerus in majori pyramide ad pyramidem minorem, hoc est, pyramides illæ sunt inter se, ut bases.

At si basis major minorem basim non contineret accurate, sed tamen habeant aliquam communem mensuram; dividi fingatur bases in partes huic mensuræ communi æquales: jam pyramides duæ tot alias continebunt pyramides æquales, quot sunt in utraque pyramide partes communes, ac proinde pyramides sunt etiam, ut bases.

Tandem si pyramidum bases forent incommensurabiles, adhibeatur aliqua mensura, quæ minuatur in infinitum, donec fiat utriusque basis mensura communis, quemadmodum dictum est de figurarum similitudine: eodem modo patet, in hoc etiam casu pyramides esse inter se, ut bases.

PROP. II. SOLIDORUM CURVILINEORUM GENESIM EXPLICARE. Si recta sublimis motu sibi semper parallelo circuli circumferentiam radat, figura solida CI hoc motu genita (Fig. 30.) *cylindrus* dicitur. At si recta per aliquod punctum fixum, & sublime perpetuo transiens, altera extremitate radat circuli circumferentiam, solidum AGM hoc motum genitum *conus* vocatur. Utriusque autem figuræ *basis* vocatur circulus, cujus circumferentiam recta percurrit. Patet, cylindrum duobus circulis, conum autem circulo unico terminari. Recta per utriusque circuli centrum in cylindro transiens, in cono autem per basis centrum, ipsumque coni verticem, *axis* dicitur. Si

axis sit perpendicularis basi, cylindrus, vel conus *rectus* solidum genitum appellatur; secus autem, *obliquus* vocatur. Si autem basis fuerit quævis alia curva, solidum dicitur *cylindricum* vel *conoidicum*. Figura 29. refert cylindrum rectum, figura autem 30. conum rectum repræsentat. Si semicirculus AHF (Fig. 31.) circa immotam diametrum AB in orbem ducatur, donec ad pristinum situm redeat, solidum inde genitum *sphæra* dicitur.

COR. I. Si basis prismatis, vel pyramidis, aucto numero laterum, & imminuta magnitudine in infinitum, abeat in curvam continuam, prisma abit in solidum cylindricum, pyramis in conoidicum. Item prisma, cujus latera sunt perpendicularia basi, mutatur in cylindrum rectum; pyramis vero, in qua basis latera sunt æqualia, & distantiæ a vertice æquales, abit in conum rectum.

COR. II. Si sphæra plano quovis secetur, sectio erit circulus, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphæræ, ac deinde erit major, vel minor, prout planum sectionis magis, vel minus recedet a centro sphæræ. Sit enim sectio FIH, ad cujus planum ducatur diameter perpendicularis AB, quæ plano secanti occurrat in E. Si punctum E congruat cum centro C; patet, rectas EI fore radios sphæræ. Si autem cadat extra in triangulis CEI, CEF, anguli ad E erunt recti, latus CE commune, & basis CI = CF; quare quodvis latus CI = EF, ac proinde in utroque casu sectio erit circulus, cujus centrum E; illud vero centrum in primo

mo casu coincidet cum centro sphæræ. Patet autem, ob angulum rectum in E, radium circuli EF semper minorem fore radio sphæræ CF, nisi radii illis congruant abeunte E in C. Evidens etiam est, eo minorem fore chordam HF, nempe circuli diametrum, quo major fuerit distantia CE.

COR. III. Sphæra considerari potest tanquam composita ex pyramidulis æqualibus numero finitis, & infinite parvis, quarum bases sunt in ipsa sphæræ superficie, vertex autem communis est ipsum sphæræ centrum.

SCHOL. In Capite præcedenti, ubi prismata & pyramides inter se comparavimus, aliqua dubitatio suboriri posset, quod nempe solida e superficiebus composita habere videamur. Et re quidem vera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo lineæ, solidum motu continuo superficiei; at linea non ex punctis, sed ex lineolis, superficies ex areolis, non ex lineis, solidum ex spatiolis solidis, non ex superficiebus componitur. Neque genuinam linearum, superficierum & solidorum notionem Tyronibus proponunt nonnulli magistri, qui lineas tanquam e punctis, superficies ex lineis, solida ex superficiebus composita repræsentant. Itaque dum (in cor. 6. cap. præc.) ex sectionum æqualitate prismatum, & pyramidum æqualitatem concludimus; id non debet intelligi, quasi prismata, & pyramides ex sectionibus planis componi velimus; nam loco sectionis unius considerari possent sectiones duæ infinite proximæ, quarum (in cit. coroll.) eadem foret distantia sive altitudo, ut patet ex planorum parallelismo. Igitur minima solida duabus sectionibus in-

finite vicinis comprehensa forent æqualia in casu proposito; quare communem altitudinem negligere licuit; solamque sectionum æqualitatem considerare; id vero facere nunquam licet, nisi præter sectionum æqualitatem, ubi æquales etiam sint binarum quarumcunque indefinite proximarum distantiæ. Porro evidens est, hanc methodum ad *exhaustionum* methodum sæpius explicatam reduci, ac proinde ad severitatem geometricam esse omnino compositam.

CAPUT II.

De Solidorum mensura.

PROP. I. PRISMATIS, CUJUS LATERA RECTILINEA SUNT BASI PERPENDICULARIA, SUPERFICIEM METIRI. Singulæ prismatis facies in hoc casu sunt rectangula sub singulis lateribus basis, singulisque prismatis lateribus rectilineis contenta; ideoque omnium hujusmodi rectangulorum summa est tota basis perimeter in latus rectilineum ducta. Quare prismatis superficies, demptis basibus, est productum ex perimetro basis in unum e lateribus rectilineis. Huic producto addatur dupla basis superficies, habebitur superficies tota prismatis.

COR. I. Cum sex quadratis æqualibus terminetur cubus, habebitur tota cubi superficies, si quadrati unius superficies sumatur. Quia vero parallepipedum sex terminatur superficiebus, quarum duæ quælibet oppositæ sunt æquales; inveniantur tres inæquales superficies, illarumque summa bis sumatur.

tur.

tur: habebitur tota parallepipedi superficies.

COR. II. Cum basis cylindri considerari possit tanquam polygonum regulare ex lateribus numero infinitis, & infinite parvis compositum; cylindrus haberi poterit tanquam prisma *ifinitilaterum*: cujus proinde superficies habebitur, si tota basis perimeter, seu circuli circumferentia ducatur in altitudinem, & producto addatur dupla basis, sive circuli superficies.

PRO. II. PYRAMIDIS, CUJUS LATERA OMNIA SUNT ÆQUALIA, ET BASIS LATERA SINT ETIAM ÆQUALIA, SUPERFICIEM INVENIRE. Cum facies omnes pyramidis in hoc casu sint triangula isoscelia æqualia; erit omnium triangulorum summa æqualis dimidio producto ex tota basis perimetro in perpendiculum ex vertice pyramidis ad latus quodlibet basis demissum; nam triangulum quodlibet æquatur dimidio producto ex latere basis ducto in suum perpendiculum. Hæc autem singula perpendicula sunt æqualia; habebitur ergo in hoc casu pyramidis superficies, dempta basi.

COR. I. Conus est pyramis *infinitilatera*, ac proinde coni recti superficies æqualis est dimidio producto ex circumferentia basis in longitudinem, sive latus coni, dempta tamen basi.

COR. II. Si pyramis plano basi parallelo *truncata* ponatur, facies omnes reliquæ pyramidis versus basim abeunt in trapezia æqualia; hæc autem trapezia singula dividi possunt in triangula duo æqualia, quorum bases sunt sectionis, & basis latera, altitudo autem communis est ipsarum basium distantia perpendicularis. Quare singulorum trian-

gulorum mensura est dimidium productum ex singulis basibus in ipsam basium distantiam, ac proinde superficies pyramidis truncatæ æquatur dimidio producto ex summa perimetri basis, & sectionis in distantiam perpendicularem basium.

COR. III. Si conus rectus plano basi parallelo truncatus ponatur, coni hujus truncati versus basim superficies æqualis est dimidio producto ex peripheriarum summa in coni truncati longitudinem, sive latus. Res autem facilius obtinetur, si inveniatur circulus DE, (Fig. 30.) cujus peripheria æqualis sit semisummæ peripheriarum BC, GM. Sumatur nempe punctum D medium inter B & G, ducaturque recta DE parallela sectioni BC, hæc erit diameter circuli quæsiti. Etenim ductis perpendicularibus Bf, Dh; erit ob triangulorum DBf, DGh similitudinem Bf: Df = Dh: Gh, ac proinde ob Bf = Dh, erit etiam Df = Gh: quare eadem est differentia inter diametros BC & DE, quæ est inter diametros DE & GM; illa nempe differentia est dupla rectæ Df, vel Gh; ideoque recta DE est media proportionalis arithmetica inter BC, & GM, seu quod idem est, diameter DE æqualis est semisummæ diametrorum BC, & GM. Sed circuli, utpote figuræ similes, suas habent peripherias diametris proportionales (Schol. cap.3.): ergo circumferentia circuli diametro DE descripti est media proportionalis arithmetica inter circumferentias diametris BC, & GM descriptas. Habebitur ergo coni truncati BCGM superficies, si multiplicetur circuli medii DE circumferentia per latus coni BG.

COR.

COR. IV. Si concipiatur cylindrus rectus KQLM (Fig. 32.) circumscriptus sphæræ habens pro axe diametrum AB, pro basi circulum sphæræ maximum; superficies segmenti sphæræ HAF æqualis erit superficiei cylindri QNRK, & area totius sphæræ æqualis areæ totius cylindri, demptis basibus. Etenim concipiatur particula quævis Ff circuli *genitoris* ita parva, ut infinite accedat ad lineam rectam, productaque Ff usque ad BA in G, recta FfG generabit superficiem coni recti, & Ff superficiem coni truncati, cujus mensura erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum, quarum radii sunt EF & ef; ducta autem PO, ita ut peripheria radio PO descripta æqualis sit semisummæ peripheriarum prædictarum; erit coni truncati superficies, ut recta Ff ducta in circumferentiam, cujus radius est OP. Jam vero ob triangula similia rectangula Gef, GEF, GPO, OPC, erit Ee vel Nn : Ff = GE : GF = GP : GO = PO : CO, vel EN, ob EN = BL = CO; ideoque Nn × EN = fF × PO, atque ideo cum peripheriæ sint, ut radii; erit productum ex Nn in peripheriam radio EN descriptam æquale producto ex fF in peripheriam radio PO descriptam. Primum autem productum exprimit aream genitam ab Nn, alterum vero aream genitam ab Ff. Quare tota area genita a toto arcu AfF æquatur toti areæ genitæ a recta QN; & abeunte REN in MBL, tota sphæræ superficies totius cylindri superficiei æqualis est, demptis basibus.

COR. V. Superficies sphæræ æqualis est producto ex circumferentia circuli maximi in axem, sive diametrum sphæræ, ac proinde

circuli maximi superficies quadruplo major est (cor. 1. prop. 2. cap. 2.)

COR. VI. Superficies tota cylindri circumscripti, inclusis basibus, est ad totam sphæræ superficiem, ut 3 ad 2. Nam superficies sphæræ in hoc casu basi cylindi quadruplo major est, superficies autem tota cylindri sua basi sexies major est.

PROP. III. PRISMATIS SOLIDITATEM METIRI. Polygonum, quod prismatis basis est, in ipsam prismatis altitudinem ducatur: habebitur soliditas tota prismatis, ut patet ex genesi ipsius solidi, quod producitur motu parallelo basis, ac proinde basis, sive polygoni superficies, per altitudinem multiplicari debet.

COR. I. Soliditas cubi habetur multiplicando faciem quadratam basis per ipsum quadrati latus. Parallepipedi soliditas invenitur, si parallelogrammi superficies per altitudinem multiplicetur; habetur autem soliditas cylindri, si basis, circuli nempe superficies, in altitudinem cylindri ducatur.

COR. II. Eadem in solidorum mensura ratiocinatione instituta, quam in metiendis superficiebus adhibuimus, evidens est, cubum esse communem solidorum mensuram, non secus ac quadratum est mensura superficierum. Itaque pes solidus continet pollices cubicos 1728, nempe tres habet dimensiones, quarum singnlæ 1 pedi, sive 12 pollicibus æquantur; & ita dicendum de alia qualibet mensura.

PROP. IV. PYRAMIDIS SOLIDITATEM INVENIRE. Si ad centrum I cubi GL fiat quadrata pyramis (Fig. 33.), cujus basis sit cubi facies quadrata; evidens est, totam cubi soliditatem dividi in sex hujusmodi pyra-

mi-

mides quadrilateras æque altas & æqualium basium, ac proinde æquales. Igitur pyramis quælibet erit sexta pars cubi; sed cubi mensura æqualis est producto ex basi in altitudinem, ergo illarum pyramidum quælibet erit æqualis producto ex basi in sextam partem altitudinis HP, vel quod idem est, tertiam partem altitudinis IP. Ergo hujusmodi pyramidis soliditas æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, seu quod idem est, æquatur tertiæ parti cubi ejusdem basis, & ejusdem altitudinis.

Generatim pyramis quælibet æqualis est producto ex basi in tertiam partem altitudinis, sive pyramis quælibet est tertia pars prismatis eamdem cum ipsa pyramide basim habentis, eamdemque altitudinem. Etenim sit pyramis quælibet, fingaturque cubus, cujus altitudo sit altitudinis pyramidis dupla. Jam si ex centro cubi alia exeat pyramis, cujus basis sit facies quadrata cubi; evidens est, hanc pyramidem habere eamdem cum proposita pyramide altitudinem: ac proinde pyramides illæ sunt inter se, ut bases (Cor.8. Prop. 1. cap. præc.) Sed soliditas pyramidis cubi basi innixæ æqualis est producto ex tertia parte altitudinis in basim; ergo ob altitudinem eamdem in utraque pyramide erit soliditas propositæ pyramidis æqualis producto ex tertia parte altitudinis in basim: ideoque generatim pyramis quælibet est tertia pars prismatis ejusdem basis, & altitudinis.

COR. I. Cum cylindrus tanquam prisma infinitilaterum, itidemque conus tanquam pyramis infinitilatera considerari possint; erit conus tertia pars cylindri eamdem habentis basim, & eamdem altitudinem.

COR.

COR. II. Cum sphæra haberi possit tanquam composita ex infinitis pyramidulis, quarum vertex communis est in centro sphæræ, bases autem omnes simul sumptæ totam occupant sphæræ superficiem; singulæ illæ pyramides æquales sunt producto ex tertia parte radii in suas bases, ac proinde tota pyramidum summa æqualis est producto ex omnibus basibus simul sumptis, hoc est, ex superficie sphæræ in tertiam partem radii. Ergo tota sphæræ soliditas habebitur multiplicando tertiam radii partem per circuli maximi superficiem quater sumptam.

COR. III. Cum soliditas cylindri sit productum ex diametro in circulum maximum, soliditas sphæræ æqualis est duabus tertiis partibus cylindri circumscripti.

PROP. V. SOLIDA DUO SIMILIA SUNT IN RATIONE TRIPLICATA LATERUM HOMOLOGORUM. Ex solidorum definitione & ex præcedentibus propositionibus evidens est, corporis cujuslibet soliditatem esse semper, ut productum ex aliqua superficie in aliquem axem, vel aliquam altitudinem; superficies autem ex duabus dimensionibus componitur, ergo solidum quodlibet est in ratione composita trium dimensionum homologarum, seu ejusdem nominis: sed solida similia ea dicuntur, quæ singulas dimensiones homologas habent proportionales; ergo solida similia sunt in ratione composita ex tribus dimensionibus proportionalibus, ac proinde in ratione triplicata unius cujuslibet dimensionis homologæ.

COR. I. Sphæræ sunt in ratione triplicata diametrorum. Etenim sphærarum soliditates sunt inter se, ut circuli maximi superficies

ficies in radium ducta (Cor. 2. Prop. præc.) Sed circulorum superficies sunt in ratione duplicata semidiametrorum (Cor. 1. Prop. 3. Sect. præc.) ergo sphæræ sunt in ratione triplicata semidiametrorum, vel diametrorum. Idem facile patet ex spherarum similitudine; cum enim sphærarum soliditates per circuli maximi superficiem determinentur, sintque circuli figuræ similes; evidens est, spheras esse solida similia, ac proinde in ratione triplicata diametrorum.

COR. II. Cubi sunt solida similia, itemque similes sunt cylindri sphæris circumscripti (Cor. 3. Prop. præc.). Ergo cubi sunt in ratione triplicata laterum, & cylindri sunt in ratione triplicata diametrorum.

COR. III. Prismata omnia, si inter se comparentur, ac pyramides omnes inter se; erunt ut producta ex basibus, & altitudinibus; quare si bases fuerunt equales, erunt solida, ut solæ altitudines; si autem altitudines fuerint æquales, erunt ut solæ bases. Si ea solida fuerint æqualia, altitudines erunt basibus reciproce proportionales, & viceversa, si bases fuerint altitudinibus reciproce proportionales, solida erunt æqualia. Tandem si bases fuerint similes, & altitudines lateribus basium homologis proportionales, solida erunt in ratione triplicata laterum homologorum, vel altitudinum.

SCHOL. De solidorum rectorum superficiebus in Capite præcedenti sermonem habuimus; verum si solida fuerint obliqua, superficierum mensura sublimiorem Geometriam aliquando postulat. Quod spectat solida superficiebus planis terminata, res est nullius difficultatis. Cum enim solidorum il-

lo-

lorum facies ſint polygona rectilinea, ad triangulorum ſuperficiem reduci ſemper poterit illorum menſura. Priſmatis cujuſvis exemplo rem illuſtrabimus. Per punctum quodlibet in aliquo priſmatis latere traductum intelligatur planum ad latus illud perpendiculare; idem planum alia omnia priſmatis latera utpote parallela perpendiculariter quoque ſecabit, atque ſectio erit polygonum, cujus unumquodque latus ad duo parallela priſmatis latera erit perpendiculare. Quare ſuperficies uniuſcujuſque faciei æquabitur producto ex unoquoque ſectionis latere in priſmatis latus quodlibet ob laterum omnium æqualitatem; ac proinde priſmatis ſuperficies æquatur producto ex omnibus lateribus ſectionis, hoc eſt, ex tota ſectionis perimetro in priſmatis latus quodlibet. Jam ſi priſma rectum ponatur, planum lateri perpendiculare coincidit cum baſi, ideoque ſuperficies priſmatis æqualis eſt producto ex perimetro baſis in altitudinem, ut ante; quod idem valet in ſuperficie cylindri, qui poteſt conſiderari tanquam priſma infinitilaterum. At ſi rectus non fuerit cylindrus, planum per cylindri axem, vel latus quodlibet perpendiculariter traductum ſectione ſua cum cylindro obliquo generabit curvam, quæ *Ellypſis* vocatur a Geometris, de qua in appendice mox addenda pauca dicemus. Erit autem cylindri obliqui ſuperficies æqualis producto ex Ellypſis circumferentia in latus cylindri. Quod ſpectat coni obliqui ſuperficiem, patet, eam ad ſectoris circularis ſuperficiem, ut fit in cono recto, reduci non poſſe, cum in cono obliquo æquales non ſint lineæ omnes ductæ ex vertice coni in baſim. Sed hæc pauca monuiſ-

nuiſſe ſatis ſit; hæc enim ad Geometriæ elementa non pertinent.

APPENDIX

DE LINEIS CURVIS.

Lineæ curvæ notionem ita ſimplicem eſſe jam obſervavimus, ut explicatione ulla vix clarior effici poſſit; quare, prætermiſſa definitione, de lineis curvis generatim, & deinde de Parabola, & Ellypſi pauca exponemus; alia deinde, ubi neceſſitas occurret, demonſtraturi.

In curva qualibet (Fig. 34.) recta AD lineas parallelas, ut MM, æqualiter dividens, *diameter* curvæ appellatur; *axis* autem vocatur, ſi eaſdem parallelas ad angulos rectos ſecet. Punctum A in axe *vertex* curvæ dicitur; rectæ autem parallelę MM dicuntur *ordinatæ*: pars diametri, vel axis inter punctum A, & ordinatam comprehenſa, dicitur *abſciſſa*. *Æquatio* curvæ appellatur formula algebraica, quæ relationem inter ſemiordinatas, & abſciſſas exprimit. Ita demonſtratum eſt in circulo (Fig. 16.) quadratum rectæ EO æquale eſſe producto ex CO in OL. Jam diameter CL dicatur a, ſitque $CO = x$, & $OE = y$. Erit $OL = a - x$; ac proinde $y^2 = ax - x^2$, quę eſt æquatio ad circulum. Ex his evidens eſt, ordinatas, & abſciſſas curvę eſſe quantitates indeterminatas; hę autem determinantur, ſumptis pro arbitrio alterutrius quantitatis valoribus. Ita ſi in ęquatione ad circulum fiat $x = 0, 2, 3, 4$ &c. invenietur $y = 0, 1, 2, 3,$ &c. & $a = 10$. Quare, ſi ex

si ex singulis punctis erigantur perpendiculares hoc modo determinatę, & per singulas perpendicularum extremitates ducatur curva, hæc ad quæsitam curvam eo accuratius accedet, quo plures erunt hujusmodi perpendiculares. Ordinatæ non solum ad axem, sed ad quamlibet diametrum referri possunt, atque etiam initium abscissarum non a solo diametri, aut axis vertice computari potest, sed etiam ab aliis punctis. Ita in circulo abscissę computari possunt vel ab ipso diametri vertice, vel etiam a centro, atque ita prodeunt diversæ ejusdem curvę equationes. Verum quocunque modo curva consideretur, probe distingui debent rectę ad dexteram, vel ab finistram jacentes, & ideo dicuntur *positivæ*, vel *negativæ*. Has quidem vel illas appellare licet positivas, vel negativas; at ubi appellatio determinata est, hęc semper retineri debet: quare semiordinatę, & abscissę possunt esse vel negativæ, vel positivę. Ratio autem facile patet ex iis, quæ de quantitatibus positivis, & negativis in Algebra observavimus.

II. Curva quælibet considerari potest vel tanquam curva *polygona*, vel tanquam curva *accurata*. Primus considerandi modus nihil aliud significat, nisi curvam esse polygoni inscripti, & circumscripti *limitem*. Unum autem probe observandum est in curvarum consideratione; si nempe curvam aliquam velut polygonam quis tractaverit, cavere deinde debet, ne eamdem curvam velut accuratam habeat, & viceversa; atque etiam eadem regula tenenda est in duarum curvarum consideratione, ambæ scilicet vel tanquam polygonæ, vel tanquam accuratæ considerari debent,

bent,

bent; inde enim in rebus physicis orti sunt errores aliqui. Rem exemplo demonstrabimus. In circulo quocunque PQD (Fig. 35.) ducantur chordæ æquales, & infinitesimæ PD, DE, producaturque PD in O; donec DO = PD. Præterea agantur per puncta O & E recta OQ, & per punctum D tangens DN rectæ OQ occurrens in N; erit OE = 2NE. Etenim triangulum DOE est isoscele; præterea anguli ODE mensura est dimidius arcus PDE; anguli autem NDE mensura est dimidius arcus DE; ergo recta DN æqualiter dividit angulum ODE; ideoque ob DO = DE, erit OE = 2NE. Jam ponatur corpus aliquod describere arcum circuli infinitesimum PDE, vi aliqua urgente secundum directionem datam, quæ in loco D corpus a linea recta retrahat. Si consideratur circulus tanquam polygonum, chorda infinitesima PD erit spatiolum tempore præcedenti infinitesimo percursum, eritque DO lineola æqualis, & in directum posita spatiolum alterum tempore subsequenti æquali descriptum. Quare si ducatur OE, directioni vis in D agentis parallela, erit hæc lineola OE vis hujus effectus; vi enim illa corpus ex O transit ad arcum circuli. At si consideretur circulus tanquam accuratus, tangens DN erit lineola vi urgente descripta, ideoque NE vis hujus effectus. Itaque in curva polygona vis effectus repræsentatur per OE, & in curva accurata per NE. Quare in virium mensura retinenda est eadem curvarum consideratio, alioqui effectus duplo major æstimaretur. Verum quia in virium doctrina ipsarum virium effectus dumtaxat comparamus, res perinde se habet, quæcum-

cumque adhibeatur curvarum consideratio; eadem enim prodit effectuum proportio. Hæc autem, quæ modo explicavimus, referuntur ad virium centralium doctrinam in Physica generali demonstrandam.

III. Hæc eadem doctrina ad curvam quamlibet transferri potest; quod ut intelligatur, curvarum descriptionem generatim considerabimus. Curva quælibet plana considerari solet tanquam ex motu puncti, & perpetua directionis mutatione in plano genita; hic non agimus de curvis, quarum puncta singula in eodem non sunt plano; & ideo dicuntur *duplicis curvaturæ*. Itaque evidens est, curvam quamlibet ad lineas duas in plana positione datas, ordinatas nempe, & abscissas, referendam esse; ad determinandam nempe alicujus curvæ naturam, oportet puncti mobilis vestigia secundum certam, eamdemque legem ad rectas positione datas referri, ita ut punctum illud secundum eamdem omnino legem in quolibet infinitesimo mutatæ directionis angulo moveatur; alioqui non eamdem, sed plures curvas describeret (contra hyp.). Ex hac curvarum consideratione aliqua sane utilissima colliguntur. 1°. Recta curvam quamlilbet in unico puncto tangit. Ponamus enim, rectam in duobus, tribusve punctis contiguis curvam tangere; jam punctum mobile directionem perpetuo non mutaret, quod repugnat.... 2°. Si descriptus intelligatur circulus, qui communem cum data curva tangentem in aliquo puncto habeat, ita ut cujuscumque circuli minoris eamdem habenti tangentem arcus aliquis utrinque circa punctum contactus sit in-

intra curvam, cujuſcumque vero circuli majoris arcus ſit extra curvam; hunc circulum dicimus curvæ *oſculatorem* in dato puncto, & curvæ ipſius *curvaturam* dicimus *circulari curvaturæ analogam*. Evidens autem eſt ex Geometriæ elementis, circuli oſculatoris centrum poſitum eſſe in concurſu duarum perpendicularium ad eamdem curvam, ubi puncta duo curvæ ad ſe invicem in infinitum accedunt; hæc enim eſt circuli proprietas, ut rectæ a centro ad peripheriam ductæ ſint ipſi peripheriæ perpendiciculares; talis autem recta e centro circuli oſculatoris ad curvam ducta vocatur *radius oſculator*... 3°. Quamvis inter tangentem, & arcum circuli tranſire poſſint alii circuli innumeri, attamen inter arcum curvæ, & arcum circuli oſculatoris nullus alius circulus tranſire poteſt; nam (ex def.) quicunque minor circulus, eſt intra curvam; quicunque major, eſt extra ipſam. Tota circulorum oſculatorum utilitas eo reducitur, ut omnium curvarum arcus infiniteſimus conſiderari poſſit tanquam circularis. Etenim arcus infiniteſimus circuli oſculatoris, & arcus infiniteſimus curvæ eaſdem habent proprietates, cum radius ſit ad circulum oſculatorem & ad arcum infiniteſimum curvæ perpendicularis.... 4. Hinc definiri poteſt curvarum in quolibet puncto curvatura; ſatis enim erit diverſas circulorum oſculatorum curvaturas inter ſe comparare; quod quidem facile fieri poteſt. Etenim evidens eſt, diverſorum circulorum curvaturas eſſe in ratione reciproca radiorum; quod ut intelligatur, fingamus, duas rectas æquales in circulum flecti, unam quidem in totam circumferentiam, alteram vero in ſemi-

micircumferentiam tantum: manifestum est, semicircumferentiam duplo minus curvam esse, quam semicircumferentiam integram; & duplo major est radius circuli, ad quem semicircumferentia illa pertinet. Idem simili ratiocinatione patet, si recta eadem in arcum duplo, vel triplo majorem incurvetur, & ita deinceps. Sed rem generatim demonstravimus. Sint duo circuli inæquales C & c, quorum radii R & r ponantur in data ratione m ad n. In his circulis capiantur arcus æquales, dicaturque A arcus in majori circulo, & a arcus in minori; arcus A curvatura minor erit curvatura arcus æqualis a in ratione R ad r. Jam vero in circulo majori capiatur arcus A, qui similis sit arcui a in minori circulo; erit A : a = C : c = R : r. Quare cum sit a = A: erit etiam A : a = R : r = m : n. Igitur si arcus A similis arcui a contineat partes vel gradus m; arcus A continebit partes vel gradus n; ac proinde curvatura arcus a est ad curvaturam arcus A, ut m ad n. Quare eadem manente arcuum A & a magnitudine, circulorum c & C curvaturæ sunt in ratione m ad n, hoc est in ratione reciproca radiorum. Comparari ergo inter se possunt diversæ curvarum curvaturæ, atque etiam variæ ejusdem curvæ in diversis punctis curvaturæ: inveniatur nempe in diversis punctis radius circuli osculatoris, hoc est, circuli, qui curvam in dato puncto tangens cum ipsa curva ita congruat, ut inter curvam, & circulum nullus alius circulus transire possit. Et quidem quum aucto, vel diminuto circuli radio, minuatur, vel augeatur per gradus illius curvatura, si nullus sit circulus, qui propius, quam circulus osculator, ad curvam accedat, concluden-

dum

dum eſt, circulum cum ipſa curva in hoc puncto eamdem habere curvaturam. Ex his patet, finitam eſſe curvæ alicujus curvaturam, ſi finitus ſit radius oſculator; at ſi radius oſculator ſit infinitus, curvatura eſt nulla; tandem ſi radius oſculator = o, curvatura eſt infinita. Cæterum hæc omnia facilius intelligentur, ſi revocentur in memoriam, quæ de methodo *exhauſtionum*, & de *primis*, ac *ultimis rationibus* jam explicata ſunt. Hæc pauca, quorum uſus in Phyſicis inſtitutionibus recurret, ex ſublimiori doctrina delibaſſe ſatis ſit. Supereſt, ut Parabolæ, & Ellypſeos naturam breviter exponamus.

IV. Si in axe AD (Fig. 34.) ſumantur abſciſſæ quotlibet, & ad ſingula puncta erigantur ſemiordinatæ, ea lege, ut abſciſſæ ſemper ſint, ut quadrata ordinatarum; curva per ſingulas ordinatarum extremitates tranſiens dicitur *Parabola*. Jam abſciſſa dicatur x, & ordinata y, erit ſemper x, ut y^2; ac proinde ratio ordinatarum ad abſciſſas conſtans, & eadem manet; quare ſi p ſit quantitas conſtans, erit $\frac{y^2}{x} = p$, ac proinde $y^2 = px$, quæ eſt æquatio ad Parabolam; nempe in omni Parabola quadratum ordinatæ æquale eſt producto ex abſciſſa in quantitatem conſtantem; hæc autem quantitas conſtans *parameter* dicitur. Si in axe parabolæ abſcindatur recta AF, quæ ſit quartæ parametri parti æqualis, punctum F Parabolæ *focus* appellatur.

COR. I. Quoniam creſcente abſciſſa, creſcit etiam quadratum ordinatæ; evidens eſt, Parabolam non eſſe curvam in ſe redeuntem, ſed puncta illius ſingula ab axe perpetuo recedere in infinitum.

COR.

COR. II. Data abscissa qualibet, ejusque ordinata, inveniri semper poterit parameter; cum sit tertia proportionalis ad ordinatam, & abscissam.

COR. III. Si abscissa ponatur $= 0$, fit quoque ordinata perpendicularis $MM = O$, ac proinde puncta M, M coeunt in A, nempe in axis vertice. Quare si per vertice Parabolæ ducatur recta ordinatis parallela, hæc erit tangens Parabolæ in puncto A.

COR. IV. Ducta intelligatur secans per punctum N, quæ Parabolæ occurrat in alio puncto t, ex quo demittatur perpendicularis tp, ad quam ex puncto N erigatur perpendicularis Nq axi parallela. Sit $PT = s$, $AP = x$, $PN = y$; erit $PT (s) : PN (y) = Nq (f) : \frac{fy}{s} = qt$; ac proinde $pt = PN + qt = y + \frac{fy}{s}$, & $Ap = x + f$. Jam sumatur æquatio ad curvam in puncto t erit $pt^2 = Ap \times p = y^2 + \frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = px + pf$: deletisque in hac æquatione terminis æqualibus $y^2 = px$, fiet $\frac{2fy^2}{s} + \frac{f^2y^2}{s^2} = pf$ & dividendo per f, erit $\frac{2y^2}{s} + \frac{fy^2}{s^2} = p$. Jam puncta N & t ad se invicem accedant in infinitam, mutuoque coeant; secans abit in tangentem, fitque Nq, vel $Pp = 0$: quare $f = 0$, & $\frac{fy^2}{s} = 0$, ac proinde æquatio præcedens abit in hanc $\frac{2y^2}{s} = p$, & $2y^2 = ps$, seu ob $px = y^2$, fiet $2px = ps$, $2x = s = PT$. Igitur in Parabola recta PT, quę *subtangens* dicitur, dupla est abscissę AP.

COR.

COR. V. Recta FN ducta ex foco Parabolæ ad extremitatem ordinatæ cujuslibet æqualis est abscissæ AP, & quartæ parti parametri. Nam cum sit $PF = AP - AF = x - \frac{1}{4} p$, vel $= \frac{1}{4} p - x$, prout ordinata jacet supra vel infra punctum F; erit $PF^2 = AP^2 - AF^2 = x^2 - \frac{1}{2} px + \frac{1}{16} p^2$. Præterea $PN^2 = px$, ergo $FN^2 = PF^2 + PN^2 = x^2 + \frac{1}{2} px + \frac{1}{16} p^2$, & $FN = x + \frac{1}{4} p = Ap + AF$.

COR. VI. Si per punctum contactus ducatur recta QS axi parallela, angulus GNS æqualis est angulo FNT; nam angulus GNS æquatur angulo FTN; præterea triangulum PTN est isoscele ob $FN = AP + AF = AT + AF = FT$; ac proinde angulus GNS æqualis est angulo FNT. Hæc est tangentis proprietas, quæ in Physicis institutionibus erit utilitatis maximæ.

V. Si in axe HI sumantur abscissæ quotlibet (fig. 39.) & ad singula puncta erigantur ordinatæ FN & PM, ea lege, ut sit semper FN^2 ad PM in ratione $HF \times FI$ ad $HP \times PI$, curva per singularum ordinatarum extremitates transiens vocatur *Ellypsis* quæ in circulum abit, si quadrata ordinatarum sint æqualia producto ex segmentis abscissarum. Jam dicatur axis major $HI = a$, ducaturque ex puncto axis medio C recta BCD, quæ dicitur axis minor, sitque $BC = b$, $HP = x$, $PM = y$, $PI = a - x$, erit $a - x \times x : y^2 = a^2 : b^2$ & $y^2 = \frac{ab^2 x - b^2 x^2}{a^2}$, quæ est æquatio ad Ellypsim, in qua si ponatur $a = b$, fit $y^2 = ax - xx$ æquatio ad circulum. Si abscissæ computentur a centro C, fit $CP =$

x, PM = y, fiatque HI = 2a; erit in hoc casu $aa - xx : y^2 = aa : bb$, & $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$. Si ex minoris axis extremitate B, tanquam centro, & intervallo BF = CH, tanquam radio describatur arcus circuli axi majori occurrens in punctis F & f, puncta illa vocantur Ellypseos *foci*; evidens autem est, hæc puncta e centro Ellypseos æqualiter distare: nam ob BC axi perpendicularem triangula CBF & CBf sunt æqualia.

COR. I. Cum duo Ellypseos axes sint constantes, constans etiam est recta iisdem duobus axibus tertia proportionalis; hæc autem linea *parameter* dicitur. Quia autem duo sunt Ellypseos axes, duæ etiam sunt parametri; si nempe axis major sit primus proportionis terminus, tertia proportionalis parameter axis majoris dicitur, & contra. Jam si abscissæ ab axis extremitate computentur, sit axis major a, minor b, parameter p, erit $ap = b^2$. Si autem abscissæ computentur a centro, sit 2a axis major, & 2b axis minor, erit $2ap = 4b^2$, his autem valoribus in utraque æquatione ab Ellypsim substitutis, æquatio Ellypseos in primo casu fit $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$; in casu altero habetur $y^2 = \frac{1}{2}ap - \frac{px^2}{2a}$.

COR. II. Ex Ellypseos æquatione evidens est, eam esse curvam in se redeuntem, & undique terminatam; crescentibus enim abscissis a centro computatis decrescunt ordinatæ, ac tandem omnino evanescunt, si abscissa semiaxi æqualis sumatur. Manifestum est, mutua axium in centro C interfectione Ellypsim in quatuor partes similes & æquales dividi,

vidi, quum eadem sit ad quamlibet partem curvæ æquatio; omnesque proprietates perinde se habeant. Quia vero ordinata perpendiculari Nn perpetuo decrescente, puncta N & n coeunt in H; patet, tangentem in H esse perpendicularem.

COR. III. Distantia focorum a centro facile invenitur; nam cum sit $BF = HC$, erit $FC^2 = HC^2 - BC^2 = \overline{HC - BC} \times \overline{HC + BC}$. Quare distantia foci a centro est media proportionalis inter semiaxium summam, illorumque differentiam. Præterea ob triangulum BCF rectangulum erit $BC^2 = HC^2 - FC^2$, ac proinde $HC - FC : BC = BC : HC + FC$, seu $HF : BC = BC : FI$, nempe semiaxis minor est medius proportionalis inter foci unius distantias ab utroque axis majoris vertice.

COR. IV. Ex Ellypseos constructione summa rectarum BF & Bf æqualis est axi majori; at ponamus, eamdem manere summam in quolibet puncto, sitque $RF + Rf = HI$. Dicatur $HC = a$, $BC = b$, ordinata $RS = y$, $CS = x$, $fC = c$; erit $IS = a - x$, $HS = a + x$, $fS = c - x$, $FS = a + x$, HF, vel $If = a - c$, Hf, vel $IF = a + c$. Jam vero cum sit (per hyp.) $FR + fR = 2a$, si differentia inter FR, & fR dicatur $2z$, erit $fR = a - z$, & $FR = a + z$. Jam ob triangula FRS & fRS rectangula erit $fS^2 + SR^2 = fR^2$, hoc est $cc - 2cx + x^2 + y^2 = a^2 - 2az + z^2$. Præterea $FS^2 + SR^2 = FR^2$, hoc est, $c^2 + 2cx + xx + y^2 = a^2 + 2az + zz$; habentur ergo æquationes duæ, quarum prima si a secunda subtrahatur, fiet ex

$= 4az$, & $z = \frac{cx}{a}$, quo valore substituto in prima æquatione loco z, ideoque & $\frac{c^2x^2}{a^2}$ — loco z^2 erit $- 2cx + xx + yy = aa - \frac{2xcz}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$, factaque, ut moris est, reductione, habebitur $a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$ & $a\,y = a^4 - a\,c^2 - a\,x^2 + c^2x^2$, factaque divisione per $a^2 - c^2$ habetur $\frac{a^2y^2}{a^2 - c^2} = a^2 - x^2$; loco b^2 substituatur $a^2 - c$ fiet $\frac{a^2y^2}{} = a^2 - x^2$ & tandem $= \frac{a^2b^2 - b^2x^2 \; b^2}{a^2}$; quæ est æquatio ad Ellypsim ante inventa. Hæc ergo est Ellypseos proprietas, ut ductis ex utroque foco rectis ad punctum perimetri quodlibet concurrentibus, rectarum illarum summa sit axi majori semper æqualis. Hanc eamdem proprietatem ex æquatione Ellypseos derivare facile est; verum ex proprietate ipsa æquationem elicere placuit, ut exemplum esset Tyronibus, qua ratione ad æquationem curvæ ex data aliqua proprietate pervenire liceat. Hinc evidens est, datis duobus Ellypseos axibus Ellypsim facili manu describi posse; sumptis nempe in axe majori duobus punctis tanquam focis, his affixum retineatur filum, atque per fili longitudinem ita promoveatur acus aliqua, ut filum perpetuo tensum maneat, acus motu suo Ellipsis peripheriam percurret, ut patet ex perpetua partium fili, & axis æqualitate.

COR. V. Si ex puncto R in Ellypseos perimetro ad utrumque focum f, F ducantur rectæ FR, fR, & in linea producta FR sumatur RT = Rf, ducaturque Tf, ad quam per punctum

ctum medium E, & per punctum R agatur ER: hæc erit tangens in R. Etenim ponamus, rectam ER Ellypsi occurrere in alio puncto r. Ex hoc pucto r in recta RE agantur lineæ rT, rf, rF. Quoniam (per constr.) TR = Rf, & fE = ET, erit RE perpendicularis ad fT, ac proinde singula puncta rectæ ERr æqualiter distant a punctis f, T, ideoque rf = rT. Sed Fr + rT major est, quam FT; ergo etiam Fr + rf major est, quam FT; ideoque etiam major, quam HI; cum (per const.) sit FT = HI; quare punctum r non pertinet ad Ellypsim; ergo recta RE tangit Ellypsim in unico puncto R. Hæc est utilissima in Physicis institutionibus tangentis proprietas, quam quidem ex Ellypseos æquatione, non secus ac in Parabola fecimus, eruere licebat; sed diversas veritatis inveniendæ vias Tyronibus demonstrare maxime convenit.

SCHOL. Parabolæ, & Ellypseos æquationem consideravimus, ordinatis ad axem relatis. At ex demonstratis facile erit curvarum illarum æquationes invenire, si ordinatæ ad diametrum quamlibet referantur; eadem est in singulis casibus curvarum illarum natura. Primarias dumtaxat proprietates demonstrasse satis sit, alias enim, ubi necessitas postulaverit, in Physicis institutionibus explicabimus. Præterea etiam ad exercendum, acuendumque ingenium aliquid Tyronibus relinquere opportunissimum est, idque postulat recta docendi ratio. *Sectiones conicæ* appellantur Parabola, & Ellypsis, quibus etiam annumerari debet *Hyperbola*, de qua nullum verbum fecimus, utpote nullius fere usus in nostris Physicis Institutionibus futura. Denominationis ratio facile patebit, si tres

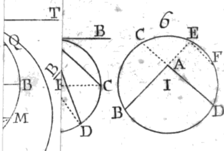
illas

illas curvas in coni sectione consideremus.

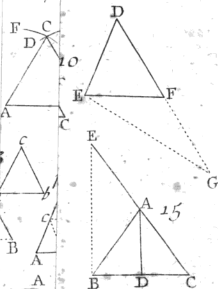
Sit ABC conus (Fig. 37) circulari basi insistens, & secetur plano quolibet IEM. Ponatur sectio alia KILM parallela basi, & occurrens priori sectioni in HI, intelligaturque sectio tertia priores duas in EH, & KL perpendiculariter bisecans, atque etiam conum in triangulo ABC. Jam producto EH, donec ipsi AK occurrat in D, ductisque EF ac DG rectæ KL parallelis, & occurrentibus sectioni triangulari in F, & G, dicatur EF = a, DG = b, ED = c, EH = x, & HI = y, ob triangulorum EHL & EDG similitudinem, erit ED (c): DG (b) = EH (x): HL $= \frac{bx}{c}$. Simili modo ob triangulorum DEF & DHK similitudinem erit DE (c): EF (a) = DH (c−x) (Fig. 39) vel c + x (Fig. 38): HK $= \frac{ac \mp ax}{c}$. Tandem cum sectio KIL parallela basi sit circulus, ut patet ex genesi ipsius coni, erit HK×KL = HI², hoc est $\frac{abx}{c} \mp \frac{abxx}{cc} = yy$; at si ponatur sectionem ita se habere, ut ED non occurrat lateri AK, sed sit ipsi parallela; tunc erit HK = EF = a, ideoque HK×HL = HI, hoc est $\frac{abx}{c} = y^2$. Si æquationes illas seorsim consideremus, evidens est, figuram 37 Ellypsim referre, cum quadrata ordinatarum semper sint, ut productum ex segmentis abscissarum. Figura 38 refert curvam, quæ *Hyperbola*

bola dicitur; in hac autem curva non secus ac in Ellypsi, quadrata ordinatarum sunt, ut productum ex segmentis abscissarum; sed probe notandum est discrimen. Sectio conica est Ellypsis, si planum secans sectioni triangulari perpendiculare duobus coni lateribus occurrat; at sectio conica fit Hyperbola, si planum secans neque sit coni lateribus parallelum, neque duo secet coni latera: sed in hoc casu sectio ita se habet, ut planum secans productum cono ad verticem opposito occurrat in D, alteraque sectione generet Hyperbolam oppositam. Recta DE dicitur *axis transversus*, punctum hujus axis medium vocatur *centrum* Hyperbolarum, per quod si ducatur hinc & inde recta perpendicularis ea proportione, ut productum ex segmentis abscissarum sit ad quadratum ordinatæ, sicut est quadratum axis transversi ad quartum terminum proportionalem; habebitur quadratum axis, qui *conjugatus*, vel *secundus* axis appellatur. Igitur in æquatione ad Hyperbolam punctum D sumitur in Hyperbola opposita, & productum ex segmentis abscissarum est DH×EH (Fig. 38). Tertiam æquationem $\frac{abx}{c} = y^2$ esse ad Parabolam, cujus parameter $\frac{ab}{c}$ ex antea demonstratis evidens est. In hac autem curva planum secans est alterutri lateri coni parallelum. Itaque cum ex coni sectione natæ sint tres illæ curvæ, patet cur illis factum sit *sectionum conicarum* nomen. Sed hæc breviter dicta sint, ut Algebræ usus in Geometria Tyronibus ostendatur.

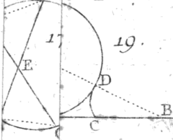
F I N I S.



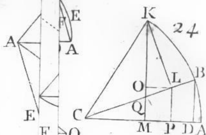
T
Q
B
M
B
B
F
C
D
6
C
E
F
A
I
B
D

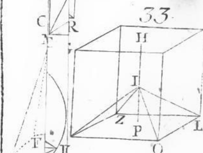


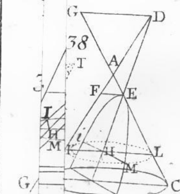
F
C
D
10
A
C
D
E
F
G
E
A
15
B
D
C
c
b
c
B
A



A
17
19.
E
D
B
C


24
K
E
F
A
A
B
L
O
Q
E
C
M
P
D
A


F
O
28
33
C
R
H
I
Z
P
L
F
A
O


G
D
38
T
A
F
E
I
H
M
K
H
L
M
G
C



